

# Devoir Surveillé n° 1

## ESSEC - HEC

Le 07/10/23

Durée : 4 heures

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

### Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilités composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . On suppose que les variables  $U_k$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de  $N$  ;
- On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \sum_{k=1}^n U_k$  et  $X_0$  est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire  $X$  définie par :

$$X = \sum_{k=1}^N U_k$$

et l'on précise que  $X = X_0 = 0$  si  $N$  prend la valeur 0. **On dit que  $X$  suit une loi composée.**

- Pour tout entier naturel  $j$ , on pose  $p_j = P(N = j)$ ,  $q_j = P(U_1 = j)$  et  $r_j = P(X = j)$ .

### Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables  $U_k$  suivent la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , où  $p$  est un réel de l'intervalle  $]0; 1[$ .

1. Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , quelle est la loi de  $X_n$  ?

2. Pour tout entier naturel  $j$ , établir :  $r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j) p_n$ .

3. Dans cette question **3**, on suppose que  $N$  suit la loi binomiale de paramètres  $m$ , entier naturel, et  $\pi$ , réel dans  $]0; 1[$ . Soit  $j$  un entier naturel.

(a) Justifier que  $r_j = 0$  si  $j > m$ .

(b) Établir : si  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$ ,  $r_j = \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$ .

(c) Vérifier : pour tous entiers  $j, n, m$  tels que  $0 \leq j \leq n \leq m$ ,

$$\binom{n}{j} \binom{m}{n} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j}$$

(d) En déduire, pour tout  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$  :

$$r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} [(1-p)\pi]^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$$

(e) Montrer finalement que  $X$  suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de  $m, p$  et  $\pi$ .

4. On suppose dans cette question 4 que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , réel strictement positif.

(a) Montrer que pour tout entier naturel  $j$ , on a :

$$r_j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} [\lambda(1-p)]^{n-j}$$

(b) En déduire que  $X$  suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de  $p$  et  $\lambda$ .

## Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout  $y$  réel et tout entier  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i), \quad \text{et} \quad \binom{y}{0} = 1$$

5. Écrire une fonction Python d'entête `def cb(y,k)` : qui calcule  $\binom{y}{k}$ .

6. *La formule du binôme négatif.*

Soit  $c$  un réel strictement positif, et  $x$  un réel de  $[0; 1[$ .

(a) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt$ .

(b) Montrer, en utilisant une intégration par partie, que pour tout  $x$  strictement positif, et pour tout entier  $n$

$$I_n = \frac{1}{n+1} (x)^{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1} I_{n+1}$$

(c) Démontrer par récurrence que (on utilisera le résultat précédent uniquement dans la partie hérédité).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n.$$

(d) Vérifier que pour tout  $t \in [0; x]$  :  $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$ .

$$\text{En déduire l'encadrement : } 0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.$$

(e) i. Montrer, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :  $\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{c}{k}\right)$ .

ii. Montrer que pour tout réel  $t$  strictement plus grand que  $-1$ ,  $\ln(1+t) \leq t$ .

iii. Établir, pour tout entier naturel  $k \geq 2$  :  $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ .

$$\text{En déduire : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

iv. Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :  $\ln \left[ \binom{c+n}{n} \right] \leq c(1 + \ln(n))$ .

$$\text{En déduire : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0.$$

(f) En conclure que la série  $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$  est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

7. Soit  $p$  un réel de  $]0; 1[$  et  $r$  un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par  $p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r$  définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres  $r$  et  $p$ .

8. Si  $Y$  est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et  $p$ , reconnaître la loi de  $Y + 1$ .

9. *Espérance et variance.*

Soit  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres  $r$  réel strictement positif et  $p \in ]0; 1[$ .

(a) Montrer : pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$ .

(b) Montrer que  $Z$  admet une espérance et que l'on a :  $E(Z) = \frac{r(1-p)}{p}$ .

(c) Montrer que  $Z$  admet une variance et que l'on a :  $V(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ .

On pourra commencer par calculer l'espérance de  $Z(Z-1)$ .

### Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  a sa loi donnée par  $p_k = P(N = k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de  $N$  vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels  $a$  et  $b$ , avec  $a < 1$  et  $a + b > 0$ , tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}.$$

On dira alors que  $N$  suit la loi  $\mathcal{P}(a, b)$ .

10. *Détermination des lois de Panjer.*

(a) Montrer que pour tout entier  $k$  strictement positif, on a :  $p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right)$ .

(b) Dans cette question, on suppose que  $a = 0$ .

Montrer que  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $b$ .

(c) Dans cette question, on suppose que  $a < 0$ .

i. Montrer qu'il existe un unique entier naturel  $r$ , tel que :  $\forall k > r, p_k = 0$  et  $\forall k \leq r, p_k \neq 0$ . On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les  $p_k$  tous strictement positifs.

ii. Montrer :  $b = -a(r+1)$ .

iii. Établir que pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket, p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$ .

En déduire que  $p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$ .

iv. En conclure que  $N$  suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de  $a$  et  $b$ .

(d) Dans cette question, on suppose que  $a > 0$ .

i. Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , on a :  $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$ .

ii. En déduire que  $N$  suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de  $a$  et  $b$ .

11. Montrer que, dans tous les cas,  $N$  admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par :

$$E(N) = \frac{a+b}{1-a} \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

## Partie IV – L’algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l’introduction du sujet et de la partie III.
- Si  $A$  est un événement de probabilité non nulle et  $Y$  une variable aléatoire discrète admettant une espérance, on définit l’espérance de la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $A$  par

$$E_A(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P_A(Y = y)$$

- On admet que cette espérance conditionnelle a les mêmes propriétés que l’espérance.
  - Linéarité, si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance et  $\alpha$  un réel, alors

$$E_A(Y_1 + \alpha Y_2) = E_A(Y_1) + \alpha E_A(Y_2)$$

- Théorème de transfert .Si  $g$  est une fonction telle que  $g(Y)$  admette une espérance alors

$$E_A(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} g(y) P_A(Y = y)$$

12. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $P(X_n = 0)$  en fonction de  $q_0$  puis établir que  $r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n$ .

13. Soit  $j \in \mathbb{N}$ .

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , que vaut  $E_{(X_n=j)}(X_n)$ ? En déduire :  $E_{(X_n=j)}(U_1) = \frac{j}{n}$ .

(b) Établir :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j) \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) p_{n-1}$$

(c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i) P(X_{n-1} = j - i)$$

(d) En conclure :  $r_j = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$ , puis :

$$r_j = \frac{1}{1 - aq_0} \left( \sum_{i=1}^j \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i} \right)$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombres  $r_j$  et ainsi de déterminer la loi de  $X$ .

14. *Des exemples d’application.*

(a) Dans cette question, les variables  $U_i$  suivent la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

i. Montrer que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $r_j = \frac{p}{1 - a + ap} \left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}$ .

En déduire que  $X$  suit une loi de Panjer.

ii. Retrouver les résultats des questions **3** et **4** de la partie I.

(b) Dans cette question, on suppose que  $a = 0$ , rappelons que cela entraîne que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $b$ .

Soit  $p$  un réel de l’intervalle  $]0; 1[$ .

- i. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que la famille de nombres  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  définie par  $q_i = \alpha \frac{p^i}{i}$  définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  (*loi logarithmique discrète*).  
On pose  $q_0 = 0$ .  
On suppose que les variables  $U_k$  suivent cette loi de probabilité.
- ii. Montrer que pour tout entier  $j \geq 1$ , on a :  $r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^j p^i r_{j-i}$ .
- iii. En utilisant un changement d'indice, établir que pour tout  $j \geq 2$  :  $r_j = \left( p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j} \right) r_{j-1}$ , puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour  $j = 1$ .
- iv. Conclure que  $X$  suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de  $b$ ,  $\alpha$  et  $p$ .