ESSEC 2013 E2 - Corrigé non relu
Par Laurent Carrot

I. Lien entre loi binomiale et loi de Poisson

1. (a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ est une somme de loi de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p_n, donc $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n).}$
Par suite,
$$S_n(\Omega = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!], P(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}.$$

(b) i. Pour tout $n \geq k$, $k \in S_n(\Omega)$ et, d'après 1.a, $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$.

ii. • Comme np_n a une limite finie strictement positive λ, on a $np_n \sim \lambda$ et, par suite, $p_n \sim \frac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Par suite,
$$(1 - p_n)^n = exp(\overbrace{n \ln(1 - \underbrace{p_n}_{\to 0})}^{\sim -np_n \to -\lambda} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\lambda}.$$

iii. Comme $n \to +\infty$, on peut supposer que $n \geq k$, et donc
$$\begin{aligned}
P(S_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{k!} p_n^k (1 - p_n)^n \frac{1}{(1 - p_n)^k} \\
&= n(n-1)...(n-k+1) \frac{1}{k!} p_n^k (1 - p_n)^n \frac{1}{(1 - p_n)^k} \\
&= \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} ... \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{k!} (np_n)^k (1 - p_n)^n \frac{1}{(1 - p_n)^k} \\
&= \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} ... \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\to 1 \text{ car } k \text{ constant}} \frac{1}{k!} \underbrace{(np_n)}_{\to\lambda}^k \underbrace{(1 - p_n)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\frac{1}{(1 - p_n)^k}}_{\to 1 \text{ car } p_n \to 0} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.
\end{aligned}$$

(c) i. Comme $X_1(\Omega) = ... = X_n(\Omega) = [\![0, 1]\!]$, $N_n(\Omega) = \max(X_1, ..., X_n)(\Omega) = [\![0, 1]\!]$.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
P(N_n = 0) &= P(\max(X_1, ..., X_n) = 0) = P(X_1 = 0 \cap ... \cap X_n = 0) \\
&= P(X_1 = 0)...P(X_n = 0) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= (1 - p_n)...(1 - p_n) = (1 - p_n)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

iii. Par suite, comme $N_n(\Omega) = [\![0, 1]\!]$,
(N_n) converge en loi vers une loi de Bernoulli de paramètre $\lim_{n\to+\infty} P(N_n = 1) = 1 - e^{-\lambda}$.

2. (a) Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-x} - 1 + x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $x \geq 0$,
$$f'(x) = -e^{-x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Par suite, on a :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

On a donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et donc $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$.

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(U=k)-\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| &= \left|P(U=0)-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|+\left|P(U=1)-\frac{\lambda}{n}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|+\sum_{k=2}^{+\infty}\left|-\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \\
&= \left|1-\frac{\lambda}{n}-e-\frac{\lambda}{n}\right|+\left|\frac{\lambda}{n}-\frac{\lambda}{n}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|+\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}} \\
&= e^{-\frac{\lambda}{n}}-1+\frac{\lambda}{n}+\left|\frac{\lambda}{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right|+\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}} \\
&= e^{-\frac{\lambda}{n}}-1+\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)+\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}} \\
&= -1+\frac{\lambda}{n}\left(2-2e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)+\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}}_{=1(\text{somme des probabilités d'une loi } \mathcal{P}(\lambda/n))} \\
&= \frac{2\lambda}{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)
\end{aligned}$$

(c) Or, d'après 2.a, comme $\frac{\lambda}{n}\geq 0$, on a $1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\leq\dfrac{\lambda}{n}$, et, en remplaçant dans le second membre de 2.b, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

3. (a) Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}|P(U=k-i)-P(V=k-i)| &= \sum_{p=-i}^{+\infty}|P(U=p)-P(V=p)| \quad (\text{en posant } p=k-i) \\
&= \sum_{p=-i}^{-1}|\underbrace{P(U=p)}_{=0}-\underbrace{P(V=p)}_{=0}|+\sum_{p=0}^{+\infty}|P(U=p)-P(V=p)| \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(U=k)-\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|
\end{aligned}$$

Or, cette série converge (d'après 2.b), donc la série de départ converge, cqfd.
De plus, d'après 2.c,

$$A_i=\sum_{k=0}^{+\infty}|P(U=k-i)-P(V=k-i)|=\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(U=k)-\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|\leq 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2.$$

(b) • Pour tout $i\in\mathbb{N}$, $A_iP(Z=i)\geq 0$.

• Pour tout $i\in\mathbb{N}$, $A_iP(Z=i)\leq \underbrace{2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2}_{\text{constante}}P(Z=i)$.

• Or, la série de terme général $2\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^2P(Z=i)$ converge (somme des probabilités d'une variable aléatoire), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $A_iP(Z=i)$ converge aussi.

(c) • Pour tout $i\in\mathbb{N}$, $|P(U=k-i)-P(V=k-i)|P(Z=i)\geq 0$.
• Pour tout $i\in\mathbb{N}$, $|P(U=k-i)-P(V=k-i)|P(Z=i)\leq A_iP(Z=i)$.
• Or, la série de terme général $A_iP(Z=i)$ converge (somme des probabilités d'une variable aléatoire), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|P(U=k-i)-P(V=k-i)|P(Z=i)$ converge aussi.

(d) *On a établi la convergence de la série B_k*

i.

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{i=0}^{+\infty} |P(U=k-i)-P(V=k-i)|P(Z=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} |\underbrace{P(U=\overbrace{k-i}^{\geq 2})}_{=0} - P(V=k-i)|P(Z=i) + \underbrace{|P(U=1)-P(V=1)|P(Z=k-1)}_{\text{pour } i=k-1} \\
&\quad + \underbrace{|P(U=0)-P(V=0)|P(Z=k)}_{\text{pour } i=k} + \sum_{i=k+1}^{+\infty} |\underbrace{P(U=\overbrace{k-i}^{<0})}_{=0} - \underbrace{P(V=\overbrace{k-i}^{<0})}_{=0}|P(Z=i) \\
&= \left|1-\frac{\lambda}{n}-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| P(Z=k) + \left|\frac{\lambda}{n}-\frac{\lambda}{n}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| P(Z=k-1) + \sum_{i=0}^{k-2} P(V=k-i)P(Z=i)
\end{aligned}$$

ii. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z=i)_{i\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(V+Z=k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(V+Z=k\cap Z=i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(V=k-i\cap Z=i) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} P(V=k-i)P(Z=i) \quad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} P(V=k-i)P(Z=i) + \sum_{i=k-1}^{+\infty} \underbrace{P(V=k-i)P(Z=i)}_{\geq 0} \\
&\geq \sum_{i=0}^{k-2} P(V=k-i)P(Z=i).
\end{aligned}$$

iii. Notons $u_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-2} P(V=k-i)P(Z=i)$.

• Alors on a, pour tout $k \geq 2$, $u_k \geq 0$ et $u_k \leq P(V+Z=k)$.
Or, la série de terme général $P(V+Z=k)$ converge (somme des probabilités d'une variable aléatoire), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_k converge aussi.
• Par suite, comme, pour tout $k \geq 2$,

$$B_k = \underbrace{\left|1-\frac{\lambda}{n}-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|}_{\text{constante}} P(Z=k) + \underbrace{\left|\frac{\lambda}{n}-\frac{\lambda}{n}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|}_{\text{constante}} P(Z=k-1) + u_k,$$

la série de terme général B_k converge comme combinaison linéaire de séries convergentes.

4. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z=i)_{i\in\mathbb{N}}$, on a

$$P(Z+U)=k = \sum_{i=0}^{+\infty} P(Z+U=k\cap Z=i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(U=k-i\cap Z=i) \underset{ind}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} P(U=k-i)P(Z=i)$$

et $P(Z+V=k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(V=k-i)P(Z=i)$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
|P(Z+U=k)-P(Z+V=k)| &= \left|\sum_{i=0}^{+\infty} P(U=k-i)P(Z=i) - \sum_{i=0}^{+\infty} P(V=k-i)P(Z=i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{+\infty} ((P(U=k-i)-P(V=k-i))P(Z=i))\right| \\
&\underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} \sum_{i=0}^{+\infty} |(P(U=k-i)-P(V=k-i))P(Z=i)| \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} |(P(U=k-i)-P(V=k-i)|\, P(Z=i) \quad \text{(série convergente d'après 3.c)} \\
&= B_k.
\end{aligned}$$

Or, la série de terme général B_k converge (d'après 3.d.iii), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|P(Z+U=k)-P(Z+V=k)|$ converge aussi.

(b) En sommant l'inégalité obtenue à la question précédente (les pb de convergence des séries qui apparaissent ont déjà été levés), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|P(Z+U=k)-P(Z+V=k)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} B_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} |(P(U=k-i)-P(V=k-i)|\, P(Z=i)$$

$$\boxed{= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |(P(U=k-i)-P(V=k-i)|\, P(Z=i)} \qquad \text{(propriété admise au début de la question 4)}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(Z=i)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |(P(U=k-i)-P(V=k-i)|\right)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{+\infty} P(Z=i)\left(2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2\right) \qquad \text{(d'après 3.a)}$$

$$= 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} P(Z=i)}_{=1 \text{ car } Z(\Omega)\subset\mathbb{N}} = 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2.$$

5. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&|P(U_1+...+U_n=k)-P(V_1+...+V_n=k)| \\
&\quad = |P(U_1+...+U_n=k)-P(U_1+...+U_{n-1}+V_n=k) \\
&\qquad + P(U_1+...+U_{n-1}+V_n=k)-P(U_1+...+U_{n-2}+V_{n-1}+V_n=k) \\
&\qquad + ... + P(U_1+V_2+...+V_n=k)-P(V_1+...+V_n=k)| \\
&\quad \leq |P(U_1+...+U_n=k)-P(U_1+...+U_{n-1}+V_n=k)| \\
&\qquad + |P(U_1+...+U_{n-1}+V_n=k)-P(U_1+...+U_{n-2}+V_{n-1}+V_n=k)| \\
&\qquad + ... + |P(U_1+V_2+...+V_n=k)-P(V_1+...+V_n=k)|
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire.

(b) En posant $u_{i,k} = |P(U_1+...+U_i+V_{i+1}+...+V_n=k)-P(U_1+...+U_{i-1}+V_i+...+V_n=k)|$, on a, d'après la question précédente,

$$|P(U_1+...+U_n=k)-P(V_1+...+V_n=k)| = \sum_{i=1}^{n} u_{i,k}.$$

Or, on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
u_{i,k} &= |P(U_1+...+U_i+V_{i+1}+...+V_n=k)-P(U_1+...+U_{i-1}+V_i+...+V_n=k)| \\
&= |P(U_1+...+U_{i-1}+V_{i+1}+...+V_n+U_i=k)-P(U_1+...+U_{i-1}+V_{i+1}+...+V_n+V_i=k) \\
&= |P(Z_i+U_i=k)-P(Z_i+V_i=k)|
\end{aligned}$$

où Z_i, U_i et V_i vérifient les conditions de la question 4, donc, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{i,k} \text{ converge et on a } \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i,k} \leq 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \qquad (*).$$

La série de terme général $|P(U_1+...+U_n=k)-P(V_1+...+V_n=k)| = \sum_{i=1}^{n} u_{i,k}$ converge donc comme somme finie de séries convergentes et en sommant l'inégalité $(*)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|P(U_1+...+U_n=k)-P(V_1+...+V_n=k)| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{i,k} \leq \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 = n2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 = \frac{2\lambda^2}{n}.$$

(c) X, qui suit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{\lambda}{n})$, peut s'écrire sous la forme $X = \sum_{i=1}^{n} U_i$ où chaque U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et sont indépendantes entre elles.

De même, si $V \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors V peut s'écrire sous la forme $X = \sum_{i=1}^{n} V_i$ où chaque V_i suit une loi de Poisson de

paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et sont indépendantes entre elles.
Par suite,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(X=k)-e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right| &= \sum_{k=0}^{+\infty}|P(X=k)-P(V=k)| \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}|P(U_1+...+U_n=k)-P(V_1+...+V_n=k)| \\
&\leq \frac{2\lambda^2}{n}.
\end{aligned}$$

II. Modélisation de la concentration en bactéries

6. (a) D'après l'énoncé, la probabilité que la bactérie se trouve dans le prélévement est $\frac{\Delta V}{V}$, donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$.

   (b) On a $N=\sum_{i=1}^{n}X_i$, où les X_i sont supposées indépendantes, donc $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\Delta V}{V}\right)$.

7. On a $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \text{où } k=[x] \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$

   Pour diminuer le nombre d'opérations, on peut écrire $\frac{\lambda^k}{k!}=\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda}{i}$.

```
Function Poisson(x,lambda:real):real;
var k,i:integer;prod:real;
begin
  if x < 0 then Poisson:=0
           else begin
                k:=trunc(x);
                prod:=1;
                for i=1 to k do prod:= prod * lambda/i;
                Poisson:=prod * exp(-lambda);
                end;
End;
```

8. (a) En reprenant le résultat de la question 5.c avec $\lambda=c\Delta V=n\frac{\Delta V}{V}$ et $N\hookrightarrow\mathcal{B}\left(n,\frac{\Delta V}{V}\right)=\mathcal{B}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
|P(N\leq K)-P(U\leq K)| &= \left|\sum_{k=0}^{K}P(N=k)-\sum_{k=0}^{K}P(U=k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{K}(P(N=k)-P(U=k))\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{K}|P(N=k)-P(U=k| \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty}|P(N=k)-P(U=k|\leq\frac{2\lambda^2}{n} \qquad \text{(d'après 5.c)} \\
&= \frac{2n^2\Delta V^2}{nV^2}=\frac{2n\Delta V^2}{V^2}=\frac{2c(\Delta V)^2}{V}.
\end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente, un majorant de l'erreur commise est

$$\frac{2c(\Delta V)^2}{V}=2n\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2=2n(10^{-6})^2=2n10^{-12}.$$

   (c) D'après l'énoncé, on a $c\leq 10^6$, donc l'erreur est inférieure à $\frac{2.10^6(\Delta V)^2}{V}$.
   D'où, pour que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-6}, il suffit que

$$\frac{2.10^6(\Delta V)^2}{V}\leq 10^{-6}\Leftrightarrow V\geq\frac{2.10^6(\Delta V)^2}{10^{-6}}\Leftrightarrow V\geq\frac{2.10^6(10^{-3})^2}{10^{-6}}=2.10^6,$$

   et donc que le volume total soit supérieur à 2.10^6 mètres cubes.

(d) Comme on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(X=k)-e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right|\leq\frac{2\lambda\min(\lambda,2)}{n}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(X=k)-e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right|\leq\frac{4\lambda}{n}$, car $\min(\lambda,2)\leq 2$.
Par suite, en reprenant le même raisonnement qu'en 8.a avec cette amélioration, on obtient

$$|P(N\leq K)-P(U\leq K)|\leq\frac{4\lambda}{n}=\frac{4n\Delta V}{nV}=\frac{4(\Delta V)}{V}.$$

(e) D'où, pour que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-6}, il suffit que

$$\frac{4(\Delta V)}{V}\leq 10^{-6}\Leftrightarrow V\geq\frac{4(\Delta V)}{10^{-6}}\Leftrightarrow V\geq\frac{4(10^{-3})}{10^{-6}}=4.10^3,$$

et donc que le volume total soit supérieur à 4.10^3 mètres cubes.

III. Construction d'une procédure de test

9. h est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $x>-1$,

$$h'(x)=\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}-1=\ln(1+x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0.$$

On a donc

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-1}h(x)=\lim_{h\to 0}h\ln h-(h-1)=1\qquad\text{(par croissances comparées)}$$
$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}x(\ln(1+x)-1)+\ln(1+x)=+\infty$$

Par suite, h est positive sur $]-1,+\infty[$ et ne s'annule qu'en 0.

10. Posons $Y(\Omega)=\{y_i,\ i\in I\}$, où $I\subset\mathbb{N}$, et $J=\{i\in I: y_i\geq\alpha.\}$.
On a alors $[Y\geq\alpha]=\displaystyle\bigcup_{i\in J}[Y=y_i]$ et $P(Y\geq\alpha)=\displaystyle\sum_{i\in J}P(Y=y_i)$.
Comme Y est positive, on a, pour tout $i\in I$, $y_i\geq 0$. On en déduit :

$$E(Y)=\sum_{i\in I}y_iP(Y=y_i)\geq\sum_{i\in J}y_iP(Y=y_i)\geq\sum_{i\in J}\alpha P(Y=y_i)=\alpha P(Y\geq\alpha).$$

On a donc bien

$$\boxed{P(Y\geq\alpha)\leq\frac{1}{\alpha}E(Y).}$$

11. (a) *C'est le théorème de transfert!!!*
Sous réserve de convergence,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}e^{uk}P(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{e^{uk}\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(e^u\lambda)^k}{k!}.$$

Or, cette série converge (série exponentielle), donc la série de départ converge, donc concerge absolument (série à termes positifs), donc, d'après le théorème de transfert, e^{-uX} admet une espérance et

$$E(e^{uX})=e^{-\lambda}e^{\lambda e^u}=e^{\lambda(e^u-1)}.$$

(b) Comme $e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)}=e^{-u_0(1+\varepsilon)\lambda}e^{u_0X}$, $e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)}$ admet une espérance comme multiple d'une variable admettant une espérance et

$$E(e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)})=E(e^{-u_0(1+\varepsilon)\lambda}e^{u_0X})=e^{-u_0(1+\varepsilon)\lambda}e^{\lambda(e^{u_0}-1)}=e^{-\lambda(1-e^{u_0}+u_0+u_0\varepsilon)}.$$

Par suite, en posant $u_0=\ln(\varepsilon+1)$, on a bien

$$E(e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)})=e^{-\lambda(1-e^{\ln(\varepsilon+1)}+\ln(\varepsilon+1)+\ln(\varepsilon+1)\varepsilon)}=e^{-\lambda(-\varepsilon+(1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon))}=e^{-\lambda h(\varepsilon)}.$$

(c) i. Pour tout $u>0$,

$$P(\lambda^{-1}(X-\lambda)\geq\varepsilon)=P(X-\lambda\geq\lambda\varepsilon)\qquad\text{(car }\lambda>0)$$
$$=P(u(X-\lambda)\geq u\lambda\varepsilon)\qquad\text{(car }u>0)\quad=P(e^{u(X-\lambda)}\geq e^{u\lambda\varepsilon})\qquad\text{(car }exp\text{ est croissante sur }\mathbb{R})$$

ii. On a

$$\begin{aligned} P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \geq \varepsilon) &= P(e^{u(X-\lambda)} \geq e^{u\lambda\varepsilon}) \qquad \text{(pour tout } u>0 \text{ d'après 11.c.i)} \\ &\leq \frac{1}{e^{u\lambda\varepsilon}} E(e^{u(X-\lambda)}) \qquad \text{(d'après 10)} \\ &= E(e^{-u\lambda\varepsilon} e^{u(X-\lambda)}) = E(e^{u(X-(1+\varepsilon)\lambda)}) \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda h(\varepsilon)} \qquad \text{(en prenant } u = u_0 > 0 \text{ de la question 11.b)}$$

(d) *Pb selon moi dans l'énoncé, il fallait lire* $\varepsilon > 1$ *et* $0 < \varepsilon \leq 1$.
- Si $\varepsilon > 1$, alors $h(-\varepsilon)$ n'a pas de sens. Cependant, on peut calculer :

$$P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leq -\varepsilon) = P(X-\lambda \leq -\lambda\varepsilon) = P(X \leq \lambda - \lambda\varepsilon) = P(X \leq \underbrace{\lambda(1-\varepsilon)}_{<0}) = 0$$

car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Si $\varepsilon = 1$,

$$P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leq -1) = P(X-\lambda \leq -\lambda) = P(X \leq 0) = P(X=0) = e^{-\lambda} = e^{-\lambda h(-\varepsilon)}.$$

- Enfin, si $0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned} P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leq -\varepsilon) &= P(X-\lambda \leq -\lambda\varepsilon) \\ &= P(u(X-\lambda) \geq -u\lambda\varepsilon) \qquad \text{(pour tout } u<0) \\ &= P(e^{u(X-\lambda)} \geq e^{-u\lambda\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{e^{-u\lambda\varepsilon}} E(e^{u(X-\lambda)}) \qquad \text{(d'après 10 avec } -u\lambda\varepsilon > 0)$$

$$= E(e^{u(X-(1-\varepsilon)\lambda)}).$$

Or, comme en 11.b, on a

$$E(e^{u_0(X-(1-\varepsilon)\lambda)}) = E(e^{-u_0(1-\varepsilon)\lambda} e^{u_0 X}) = e^{-u_0(1-\varepsilon)\lambda} e^{\lambda(e^{u_0}-1)} = e^{-\lambda(1-e^{u_0}+u_0-u_0\varepsilon)},$$

et, en posant $u_0 = \ln(1-\varepsilon)$, on a

$$E(e^{u_0(X-(1-\varepsilon)\lambda)}) = e^{-\lambda(1-e^{\ln(1-\varepsilon)}+\ln(1-\varepsilon)-\ln(1-\varepsilon)\varepsilon)} = e^{-\lambda(\varepsilon+(1-\varepsilon)\ln(1-\varepsilon))} = e^{-\lambda h(-\varepsilon)}.$$

D'où, en posant $u = u_0 = \ln(1-\varepsilon) < 0$, on a

$$P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leq -\varepsilon) \leq E(e^{u_0(X-(1-\varepsilon)\lambda)}) = e^{-\lambda h(-\varepsilon)}.$$

- D'où, $\boxed{\text{Pour tout } \varepsilon \in]0,1],\ P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leq -\varepsilon) \leq e^{-\lambda h(-\varepsilon)}.}$

1. (a) Pour tout $\lambda > 2000$,

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) &= P(X-\lambda \leq \alpha-\lambda) = P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leq \lambda^{-1}(\alpha-\lambda)) \\ &= P(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leq -\varepsilon) \quad \text{(en posant } \varepsilon\lambda^{-1}(\underbrace{\lambda-\alpha}_{>0 \text{ car } \lambda>2000\geq\alpha})) \\ &\leq e^{-\lambda h(-\varepsilon)} \quad \text{(d'après 11.d)} \qquad = e^{-\lambda h(\lambda^{-1}(\alpha-\lambda))} = e^{-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha-1)} \end{aligned}$$

(b) Si $\lambda > 2000$, alors $\lambda^{-1}\alpha - 1 < \dfrac{\alpha}{2000} - 1$ ($\in [-1,0]$), donc, comme h est décroissante sur $[-1,0]$, on a $h(\lambda^{-1}\alpha-1) > h\left(\dfrac{\alpha}{2000}-1\right)$ (≥ 0).
Comme on a de plus $\lambda > 2000 (\geq 0)$, on a, en multipliant ces inégalités entre nombres positifs,

$$\lambda h(\lambda^{-1}\alpha - 1) \geq 2000 h\left(\frac{\alpha}{2000}-1\right),$$

et donc

$$-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha - 1) \leq -2000 h\left(\frac{\alpha}{2000}-1\right),$$

et finalement, en composant par *exp*, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$e^{-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha-1)} \leq e^{-2000h\left(\frac{\alpha}{2000}-1\right)}.$$

On a donc bien

$$P(X \leq \alpha) \leq e^{-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha-1)} \leq e^{-2000h\left(\frac{\alpha}{2000}-1\right)}.$$

(c) $2000h\left(\frac{\alpha}{2000}-1\right)=\ln(100) \Leftrightarrow h(z)=\dfrac{\ln(100)}{2000}$ en posant $z=\dfrac{x}{2000}-1$. De plus, comme $x\in[0,2000]$, on a $z=\dfrac{x}{2000}-1\in[-1,0]$.
h est continue et strictement décroissante sur $[-1,0]$, donc elle réalise une bijection de $[-1,0]$ sur $[0,1]$.
Or, $\dfrac{\ln(100)}{2000}\in[0,1]$, donc l'équation $h(z)=\dfrac{\ln(100)}{2000}$ admet une unique solution sur $[-1,0]$, notée z_0. Enfin, $\dfrac{x}{2000}-1=z_0 \Leftrightarrow x=2000(z_0+1)=\alpha_0$.
Pour moi, la question est mal posée, car on a l'impression qu'il faut montrer qu'il y a une unique solution sur $\mathbb{R}$, puis montrer qu'elle est dans $[0,2000]$...
Il y a une autre solution dans $\mathbb{R}$, que l'on trouve en résolvant l'équation $h(z)=\dfrac{\ln(100)}{2000}$ sur $\mathbb{R}_+$.

(d) En admettant que $\alpha_0>1865$, on a

$$P(X<1865)\leq P(X\leq\alpha_0)\leq e^{-2000h\left(\frac{\alpha_0}{2000}-1\right)}=e^{-\ln(100)}=\frac{1}{100}.$$

(e) Si $\lambda>2000$, alors $P(X<1865)\leq\dfrac{1}{100}$.
Or, ici, l'événement $X<1865$ est réalisé, donc on a moins d'une chance sur 100 d'avoir une concentration en bactéries supérieure à $2000/l$.