Correction du Devoir Surveillé n° 0
07/10/22

Exercice 1 :

Partie 1 : Études de deux fonctions

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle [0,1[, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

   (a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
   (d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0,1[par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2(x+\ln(1-x))}{x^2,} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 1$.
   En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 1$.
   (b) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
   (c) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
   (d) En déduire que la fonction f est continue sur [0,1[.
   (e) Montrer que f est dérivable sur]0,1[et que pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$f'(x) = -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

   On admet qu'au voisinage de 0 , on a : $\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \sim -\frac{x^3}{3}$.
   (f) Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 2/3$.
   (g) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$, limites comprises.
   (h) Tracer soigneusement l'allure de la courbe représentative de la fonction f. On donnera l'équation de la tangente en 0 et on la tracera.
   (i) À l'aide de la formule de Taylor-Young en 0 au rang 3 donnée ci-dessous, que l'on admet être licite pour une fonction φ de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0 , démontrer l'équivalence admise ci-dessus.

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right), \quad x \to 0.$$

Partie 2 : Résolutions d'équations

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée u_n sur $[0,1[$. Donner la valeur de u_1.
5. L'équation $f(x) = x$ admet-elle une solution sur $[0,1[$?

Partie 1 : Études de deux fonctions

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle [0,1[, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) On voit que

- La fonction $x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ à valeur sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x < 1 \Longrightarrow 1-x > 0$.
- La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
Finalement la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1[comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
(b) Posons $h : x \mapsto \ln(1-x)+x$.
h est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} \leq 0 \quad \text{car } -x \leq 0 \text{ et } 1-x > 0 \text{ sur } [0,1[$$

Donc la fonction h est décroissant sur $[0,1[$. Elle est donc majorée par $h(0)=0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a : $h(x) \leq 0$ soit

$$\forall x \in [0,1[, \quad \ln(1-x) \leq -x.$$

(On aurait pu utiliser un argument de convexité. En effet, $x \mapsto \ln(1-x)$ est concave et sa courbe se situe au dessous de toutes ses tangentes, notamment $y=-x$, tangente en 0 .)
(c) Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} N'(x) &= 2x - 2 - 2\left[-\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x}\right] \\ &= 2x - 2 + 2\ln(1-x) + 2 \\ &= 2((x + \ln(1-x)) \leq 0 \end{aligned}$$

car d'après la question précédente, $\ln(1-x) \leq -x$ soit $x + \ln(1-x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1[$.
Finalement, on a

$$\forall x \in \left[0,1\right[, \quad N'(x) \leq 0.$$

(d) D'après la question précédente, la fonction N est décroissant sur [0,1[. Elle est donc majorée par $N(0)=0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, on a bien $N(x) \leq 0$.
(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0,1[par

$$f(x) = \begin{cases} -2\frac{x+\ln(1-x)}{x^2,} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Comme $\ln(1-x) \to -\infty, x \to 1$ et que le reste du numérateur de f a une limite finie (comme le dénominateur), on a

$$f(x) \underset{x \to 1}{\sim} -2\ln(1-x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} +\infty.$$

(b) Au voisinage de 0 , on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

donc

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o\left(x^2\right) = -x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

(c) Au voisinage de 0 , on a donc :

$$\begin{aligned} x + \ln(1-x) &= x - x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

et donc

$$x + \ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

On en déduit que au voisinage de 0^+ :

$$f(x) = -2\frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\sim} -2\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = 1$$

Ainsi, $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} 1$ donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

(d) Notant que

- La fonction f est continue sur]0,1[comme quotient de combinaisons de fonctions usuelles continues sur]0,1[dont le dénominateur ne s'annule pas.
- De plus, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0 .

Ainsi, la fonction f est continue sur $[0,1[$.
(e) On a déjà vu que $x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$.
Donc, la fonction f est dérivable sur]0,1[comme quotient de fonction dérivable sur]0,1[car $x^2 \neq 0$. Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2\left[\frac{\left(1+\frac{-1}{1-x}\right)x^2 - 2x(x+\ln(1-x))}{x^4}\right] = -2\left[\frac{\frac{-x^3-2x(1-x)(x+\ln(1-x))}{1-x}}{x^4}\right] \\
&= -2\left[\frac{-x^2-2(1-x)(x+\ln(1-x))}{x^3(1-x)}\right] = -2\left[\frac{-x^2-2x(1-x)-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right] \\
&= -2\left[\frac{x^2-2x-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\right] \\
&= -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$f'(x) = -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

(f) Calculons le taux d'accroissement de f en 0 . On a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{-2\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}-1}{x} = \frac{-2x-2\ln(1-x)-x^2}{x^3} \\
&= -2\left(\frac{\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

x	0
$N(x)$	-
$x^3(1-x)$	$+$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\longrightarrow +\infty$

Or, on a admis qu'au voisinage de 0 , on a

$$\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}.$$

Ainsi, on obtient par quotient d'équivalents

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} -2\frac{-\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{2}{3}$$

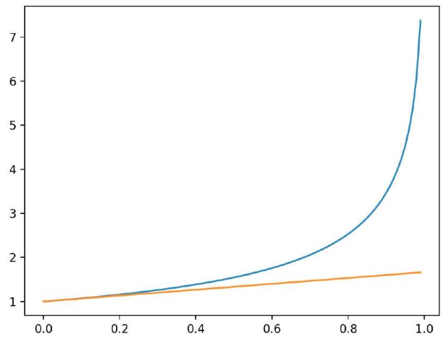
Ainsi, f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{2}{3}$.
(g) On peut dresser le tableau.
(h) L'équation de la tangente en 0 est donnée par : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$, soit d'après les calculs précédents $y = \frac{2}{3}x+1$.
On joint la figure obtenue avec Python, dont le code est aussi, à titre pédagogique, fourni. C'est cadeau.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
        if x==0:
                return(1)
        return(-2*(x+np.log(1-x))/(x**2))

X=np.linspace(0.01,0.99,100)
Y=[f(x) for x in X]
T=[2/3*x+1 for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,T)
plt.show()
```

Affichage Python



(i) On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 à la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1-x)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0 . On voit que

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= 0\\
\varphi'(x) &= \frac{-1}{1-x}\\
\varphi'(0) &= -1\\
\varphi''(x) &= \frac{-1}{(1-x)^2}\\
\varphi''(0) &= -1\\
\varphi'''(x) &= \frac{-2}{(1-x)^3}\\
\varphi'''(0) &= -2
\end{aligned}$$

Donc, au voisinage de 0 ,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{6}x^3 + o\left(x^3\right) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

ou encore

$$\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$$

Partie 2 : Résolutions d'équations

(4) On sait que :

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$ donc elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[1,+\infty[$ (d'après les calculs de limites plus haut).
- De plus, $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \in [1,+\infty[$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in [0,1[$. Pour $n = 1$, comme $f(0) = 1$, on a $u_1 = 0$.

(5) Graphiquement, cette équation n'a pas de solution (tracer la droite $y = x$ sur le même graphique ; il n'y a pas de point d'intersection).

Plus rigoureusement, d'après le tableau de variations, on a pour tout $x \in [0,1[$:

$$f(x) \geq 1$$

Mais comme $x < 1$, on obtient :

$$f(x) \geq 1 > x \quad \text{soit } f(x) > x \quad \text{(inégalité stricte)}$$

Ainsi, l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution sur $[0,1[$.

Exercice 2 :

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F.
2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de G.
3. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.
   (b) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$. Donner ses racines.
   (c) On note $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ et $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(R) \mid AX = X\}$. Montrer que ce sont deux espaces vectoriels et donner une base de chacun d'entre eux.
   (d) La matrice A est-elle inversible ?
   (e) (*) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Démontrer que :
$$M \in G \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$
   (b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.
5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que (A, B) est une base de F.
6. (a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. Vérifier que : $\quad M = \alpha A + \beta B$.
   (b) Calculer AB et BA.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n : $\quad M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.
7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
   (b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$$

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = TX_n + Y$$

8. Calculer la matrice $I_3 - T$ et exprimer cette matrice en fonction de A et B.
9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(I_3 - T)^{-1}$.
10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L, que l'on déterminera, telle que : $L = TL + Y$.
11. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n - L = T^n(X_0 - L)$$
12. Pour tout entier naturel n, exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n.

Partie I

1. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après la définition du texte

$$\begin{aligned} M \in F \quad &\iff \quad \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad M = aI + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire

$$\boxed{F = \operatorname{Vect}\left(I, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}$$

et F est donc le sous-espace vectoriel engendré par les deux matrices ci-dessus : c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La famille formée par les deux matrices susmentionnées en est génératrice et elle est clairement libre (deux vecteurs non colinéaires) : elle en forme une base. Ainsi, $\dim(F) = 2$.

2. Il est immédiat de voir que I est un élément de G, car $I^2 = I$. Cependant, $2I \notin G$. En effet, $(2I)^2 = 4I \neq 2I$ et $\boxed{G \text{ n'est pas stable par mul}}$

3. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) En prenant $a = 2/3$ et $b = -1/3$ dans la définition de F, on a bien $\boxed{A \in F}$ et le calcul donne

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = A$$

   $\boxed{\text{ce qui permet de dire que } A \text{ est également élément de } G \text{ et donc } A \in F \cap G.}$

   (b) Comme A vérifie la relation $A^2 = A$, on en déduit que le polynôme $X^2 - X$ annule A. $\boxed{\text{Ses racines sont 0 et 1}}$.

   (c) • Pour E_0 :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \quad &\iff \quad AX = 0 \\ &\iff \quad \begin{cases} 2x - y - z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -x - y + 2z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} 2x - y - z &= 0 \\ 3y - 3z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x &= z \\ y &= z \end{cases} \\ &\iff \quad X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\boxed{E_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

   (Le vecteur ci-dessus étant non nul et générateur de E_0, il en forme une base.)

   • Pour E_1 :

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff (A-I)X = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x-y-z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-z \end{array} \right. \\
&\iff X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, 1 est bien valeur propre et

$$\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

(Les deux vecteurs ci-dessus étant non colinéaires et générateurs de E_1, il en forment une base.)

(d) Comme nous l'avons vu dans la question précédente pour E_0, le système associé à A n'est pas de Cramer, donc A n'est pas inversible 0 étant valeur propre de A, $\boxed{\text{celle-ci n'est pas inversible.}}$

(e) Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\ni, \infty(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{la matrice est diagonalisable}}$.

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in F$.

4. (a) On va résoudre $M^2 = M$ pour caractériser l'appartenance à G en commençant par calculer M^2. On a

$$\begin{aligned}
M \in G &\iff M^2 = M \\
&\iff \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b^2+2ab & = & b \end{array} \right. \\
&\iff \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b(b+2a-1) & = & 0 \end{array} \right.}
\end{aligned}$$

(b) La deuxième équation $b(b+2a-1) = 0$ donne $b = 0$ ou $b = 1-2a$. Si $b = 0$, on obtient en injectant dans la première équation que $a^2 = a$ ce qui donne $a = 0$ ou $a = 1$. La matrice M correspondant à $a = b = 0$ est la matrice nulle qui est donc élément de $F \cap G$. La matrice M pour $a = 1$ et $b = 0$ est la matrice I. Si maintenant $b = 1-2a$, on a $b^2 = 1-4a+4a^2$ et en injectant dans la première équation, on a

$$a^2 + 2(1-4a+4a^2) = a \iff 9a^2 - 9a + 2 = 0 \iff a = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad a = \frac{2}{3}.$$

Au final,

$$\begin{aligned}
M \in F \cap G &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b(b+2a-1) & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1/3 \\ b & = & 1/3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2/3 \\ b & = & -1/3 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

En observant ensuite que

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = I - A$$

et que le choix de $a = 2/3$ et $b = -1/3$ donne la matrice A, on a bien

$$\boxed{F \cap G = \{0,\ I,\ A,\ I-A\}.}$$

5. On note $B = I - A$.

   I et A étant deux matrices non colinéaires de F (on a bien justifié plus haut que $A \in F$ car A correspond à $a = 2/3$ et $b = -1/3$) qui est de dimension 2, il est clair que la famille (A, B) forme une base de F.

6. (a) On pose $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. On a

$$\begin{aligned}\alpha A + \beta B &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & 2\alpha+\beta & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & \beta-\alpha & 2\alpha+\beta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Or,

$$1/3(2\alpha+\beta) = a \quad \text{et} \quad 1/3(\beta-\alpha) = b$$

   On a donc bien la relation

$$\boxed{M = \alpha A + \beta B}$$

   (b) Comme $A^2 = A$ (car $A \in G$), avec la définition de B, on a bien

$$AB = A(I-A) = (I-A)A = BA = A - A^2 = 0.$$

   En particulier, A et B commutent.

   (c) Si $n = 0$, alors la formule est clairement valide car

$$\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + I - A = I = M^0.$$

   Soit ensuite $n \geq 1$. Comme $M = \alpha A + \beta B$ et qu'on veut calculer M^n, tout est fait pour nous faire penser à utiliser la formule du binôme. Observons que comme A et B commutent, il en est de même pour αA et βB :

$$\alpha A \cdot \beta B = \alpha\beta AB = \beta\alpha BA = \beta B \cdot \alpha A = 0.$$

   De plus, comme $A \in G$, on a $A^2 = A$ et une récurrence immédiate donne $A^k = A$ pour tout $k \geq 1$. De même pour B qui vérifie $B^k = B$, pour tout $k \geq 1$. De plus, $AB = 0$. Il suit que

$$\begin{aligned} M^n &= (\alpha A + \beta B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha A)^k (\beta B)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0}(\beta B)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (\alpha A)^k (\beta B)^{n-k} + \binom{n}{n-1}(\alpha A)^n \\ &= \beta^n B + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} AB + \alpha^n A \\ &= \alpha^n A + \beta^n B, \end{aligned}$$

   ce qui est bien la formule attendue.

7. (a) Il faut montrer que 0 est valeur propre de M si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Pour ce faire, on peut exprimer M comme combinaison de A et I et utiliser les valeurs propres de A. Plus précisément,

   - Si $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$) alors $M = \beta B$ (resp. $M = \alpha A$) et M n'est pas inversible en tant que multiple d'une matrice non inversible.

   - Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors

$$\left(\alpha^{-1}A + \beta^{-1}B\right)(\alpha A + \beta B) = A + \alpha^{-1}\beta AB + \beta^{-1}\alpha BA + B = A + B = I,$$

     et $M = \alpha A + \beta B$ est bien inversible (et on a même M^{-1}).

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme M est inversible, M^n l'est aussi et on a $(M^n)^{-1} = M^{-n}$. On vérifie donc que $\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B$ est l'inverse de M^n, matrice pour laquelle on a une formule.

$$\begin{aligned}\left(\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B\right) \cdot (\alpha^n A + \beta^n B) &= \alpha^0 A^2 + \alpha^{-n}\beta^n AB + \beta^{-n}\alpha^n BA + \beta^0 B^2 \\ &= A + B = I,\end{aligned}$$

   et on a bien le résultat voulu.

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = TX_n + Y.$$

8. Le calcul donne
$$I - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
correspond à une matrice M de F avec $a = -2$ et $b = -1$. Or, on sait d'après ce qui précède que
$$I - T = \alpha A + \beta B$$
avec
$$\alpha = a - b = -2 + 1 = -1, \quad \text{et} \quad \beta = a + 2b = -4.$$
On peut donc écrire
$$I - T = -A - 4B.$$

9. Comme $(-1, -4) \neq (0, 0)$, la question $(7a)$ permet d'affirmer que $I - T$ est inversible et la question $(7b)$ donne même
$$\begin{aligned} (I-T)^{-1} &= (-1)^{-1}A + (-4)^{-1}B = -A - \frac{1}{4}B \\ &= \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10. On utilise la question précédente
$$TL + Y = L \iff L - TL = Y \iff (I-T)L = Y \iff L = (I-T)^{-1}Y.$$
On trouve donc une unique solution L qui s'écrit
$$L = (I-T)^{-1}Y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -Y.$$

11. On injecte l'équation de la question précédente. Par définition
$$\begin{aligned} X_{n+1} - L &= TX_n + Y - L = TX_n + Y - TL - Y \\ &= T(X_n - L), \end{aligned}$$
ce qu'on demandait. Une récurrence facile termine la question.

   - <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a bien
   $$X_0 - L = I(X_0 - L) = T^0(X_0 - L).$$
   - <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_n - L = T^n(X_0 - L)$. Alors,
   $$\begin{aligned} X_{n+1} - L &= T(X_n - L) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= T \cdot T^n(X_0 - L) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= T^{n+1}(X_0 - L), \end{aligned}$$
   ce qui termine cette récurrence très facile.

12. On pourrait penser qu'il suffit de remplacer par les éléments des questions et parties précédentes.
$$X_n = L + T^n(X_0 - L)$$
On se rend compte alors qu'il faut calculer T^n en fonction de A et B. On peut car T s'exprime à partir de A et B. En effet, on peut voir que
$$T = 2A + 5B$$
de sorte que
$$T^n = 2^n A + 5^n B$$
Il suit finalement que
$$X_n = L + 2^n A(X_0 - L) + 5^n B(X_0 - L).$$

Exercice 3 :

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés $1, 2, 3, 4, \ldots$

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : «Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
(b) Expliciter $P\left(X_n = 0\right)$ et $P\left(X_n = n\right)$.
(c) Justifier que $\left(Y_n = 0\right) \cap \left(Z_n = 0\right) = \left(X_n = n\right)$.
(d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $\left(X_n = 0\right), \left(Y_n = 0\right)$ et $\left(Z_n = 0\right)$.
(e) En déduire que : $P\left(V_n\right) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

2. On note V l'événement : «Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».

Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $P(V) = 0$.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

(a) Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```
def T():
        X=0
        Y=0
        Z=0
        n=0
        liste=[X,Y,Z]
        while ... :
                i=rd.randint(1,4)
                liste[i]= ...
                n=n+1
        end
        t= ...
        return(t)
```

(b) Écrire un programme Python qui simule 10000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

4. Déterminer $T(\Omega)$.
5. Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega), \quad P(T = n) = P\left(V_{n-1}\right) - P\left(V_n\right)$.
6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. (a) Donner la loi du couple $\left(X_2, W_2\right)$.

(b) En déduire la loi de W_2, et calculer son espérance.
(c) Calculer $E\left(X_2 W_2\right)$.
(d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 .

8. Déterminer $W_n(\Omega)$.

9. Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

(a) Montrer que : $\forall i \in [\![1,3]\!], E\left(W_{n,i}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$.

(b) Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}, W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

(c) Exprimer alors $E\left(W_n\right)$ en fonction de n.

10. Démontrer que : $P\left(\left(X_n=n\right) \cap\left(W_n=2\right)\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, quelle est la valeur de $P\left(\left(X_n=k\right) \cap\left(W_n=2\right)\right)$?

11. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!], P\left(\left(X_n=k\right) \cap\left(W_n=1\right)\right)=\dfrac{2\binom{n}{k}}{3^{n}}$.

Que vaut $P\left(\left(X_n=n\right) \cap\left(W_n=1\right)\right)$?

12. Démontrer que :

$$E\left(X_n W_n\right)=2 n P\left(\left(X_n=n\right) \cap\left(W_n=2\right)\right)+\sum_{k=1}^{n-1} k P\left(\left(X_n=k\right) \cap\left(W_n=1\right)\right).$$

13. Montrer alors que $E\left(X_n W_n\right)=n\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$, puis calculer $C(X_n, W_n)=E(X_n W_n)-E(X_n) E(W_n)$.

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) La variable X_n compte le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/3)$. Il en est de même pour Y_n et Z_n.

(b)

$$P(X_n=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \qquad P(X_n=n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

(c) L'évènement $[(Y_n=0) \cap(Z_n=0)]$ se réalise lorsque, après avoir placé les n premiers jetons, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun. Tous les jetons sont donc dans l'urne 1, c'est à dire que $[X_n=n]$ s'est réalisé. Ainsi $\boxed{[(Y_n=0) \cap(Z_n=0)]=[X_n=n].}$

(d) On a clairement

$$V_n=[X_n=0] \cup[Y_n=0] \cup[Z_n=0]$$

(e) La formule du crible donne

$$\begin{aligned} P(V_n)= & P(X_n=0)+P(Y_n=0)+P(Z_n=0)-P([X_n=0] \cap[Y_n=0])-P([Z_n=0] \cap[Y_n=0])-P([X_n=0] \cap[Z_n=0]) \\ & +P([X_n=0] \cap[Y_n=0] \cap[Z_n=0])\end{aligned}$$

Les trois urnes ne peuvent pas être simultanément vides après avoir placé n jetons, donc $P([X_n=0] \cap[Y_n=0] \cap[Z_n=0])$, et par ce qui précède (en reproduisant le raisonnement)

$P\left([X_n=0] \cap[Y_n=0]\right)=P\left([Y_n=0] \cap[Z_n=0]\right)=P\left([Z_n=0] \cap[X_n=0]\right)=P\left(X_n=n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

Il suit que

$$P\left(V_n\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-3\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

comme demandé.

(2) On note V l'événement : "Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide". On constate qu'on peut écrire

$$V=\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$$

En effet, si au moins une urne reste toujours vide, on a donc la réalisation de V_n pour tout n. Or la suite d'évènements (V_n) est décroissante au sens de l'inclusion :

$$V_{n+1} \subset V_n$$

(si au moins une des urnes est vide après les $n+1$ premiers jetons, elle l'était nécessairement après n'avoir placé que les n premiers). Par le théorème de la limite monotone, on a donc

$$P(V)=P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n .\right)=\lim_{n \rightarrow+\infty} P\left(V_n\right)=0$$

car $(2/3)^n \to 0$ et $(1/3)^n \to 0$ également.

(3) Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

(a) On complète ce programme sans difficulté. On va continuer à ajouter des jetons tant qu'il y a au moins un zéro dans la liste correspondant au nombre de jetons par urne. Pour cela on cherche les composantes de liste égales à 0 avec la commande find( ) et on compte combien il y en a avec la commande length( ).

```
def T():
        X=0
        Y=0
        Z=0
        n=0
        liste=[X,Y,Z]
        while min(liste)==0:
                i=rd.randint(1,4)
                liste[i-1]= liste[i-1]+1
                n=n+1
        t= n
        return(t)
```

Ici, le sujet propose $n = 10000$. On stocke donc 10000 réalisations de la variable T simulée avec la fonction ci-avant et on en fait la moyenne.

```
ech=[]
for k in range(10000):
        ech.append(T())
M=np.mean(ech)
print(M)
```

(4) Il faut au moins placer 3 jetons si on veut espérer remplir les 3 urnes, mais on peut attendre arbitrairement longtemps, en remplissant successivement les mêmes urnes. On a donc clairement $T(\Omega) = [\![3; +\infty[\![$.

(5) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Observons que

$$[T = n] \cup V_n = V_{n-1}.$$

En effet, si au moins une urne est vide après $n-1$ jetons placés, il y a deux situations (incompatibles) : ou bien il reste encore au moins une urne vide après le n-ième jeton (c'est à dire V_n) ou bien, on remplit toutes les urnes pour la première fois avec le n)ième jeton (c'est à dire $[T = n]$). L'incompatibilité donne bien

$$P(T = n) + P\left(V_n\right) = P\left(V_{n-1}\right) \Longleftrightarrow P(T = n) = P\left(V_{n-1}\right) - P\left(V_n\right).$$

(6) On peut commencer par expliciter la loi de T. D'après les questions précédentes, on a, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} P(T = n) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

On revient ensuite à la définition de l'espérance.

$$\begin{aligned} T \text{ admet une espérance } &\Longleftrightarrow \sum nP(T = n) \text{ converge (absolument)} \\ &\Longleftrightarrow \sum n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ converge} \end{aligned}$$

Or,

$$n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

et on reconnait une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes (de raisons respectives $2/3$ et $1/3$). Donc T admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(1-2/3)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2\left(\frac{1}{(1-1/3)^2} - 1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

(7) (a) Commençons par observer qu'après avoir placé 2 jetons on a entre 1 et 2 urnes vides. Connaissant combien de jetons contient l'urne 1 grâce à X_2, on sait ce qui se passe. On peut écrire le tableau de la loi conjointe. On introduit aussi N_i la variable qui renvoie le numéro de l'urne dans laquelle on place le jeton i. D'après les hypothèses, les variables N_i sont indépendantes et suivent toutes des lois uniformes sur $[\![1;3]\!]$.

$$\begin{aligned}P\left(X_2=0\cap W_2=1\right)&=P\left(\left[N_1=2\cap N_2=3\right]\cup\left[N_1=3\cap N_2=2\right]\right)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{9}\\P\left(X_2=0\cap W_2=2\right)&=P\left(\left[N_1=2\cap N_2=2\right]\cup\left[N_1=3\cap N_2=3\right]\right)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}P\left(X_2=1\cap W_2=1\right)=\\P\left(\left[N_1=1\cap N_2=2\right]\cup\left[N_1=1\cap N_2=3\right]\cup\left[N_1=2\cap N_2=1\right]\cup\left[N_1=3\cap N_2=1\right]\right)\\=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\=\frac{4}{9}\\P\left(X_2=1\cap W_2=2\right)=0\quad\text{(impossible)}\\P\left(X_2=2\cap W_2=1\right)=0\quad\text{(impossible)}\\P\left(X_2=2\cap W_2=2\right)=\frac{P\left(\left[N_1=1\cap N_2=1\right]\right)}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\=\frac{1}{9}\end{gathered}$$

Ce qui donne le tableau :

$X_2\backslash W_2$	1	2
0	2/9	2/9
1	4/9	0
2	0	1/9

(b) On en déduit, en sommant les termes de chaque colonne (formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[X_2=i] : i\in[\![0;2]\!]\}$), la loi de W_2 :

j	1	2
$P\left(W_2=j\right)$	2/3	1/3

(c) La covariance de W_2 et X_2 se calcule avec la formule

$$\operatorname{cov}\left(X_2,W_2\right)=E\left(X_2W_2\right)-E\left(X_2\right)E\left(W_2\right).$$

Connaissant la loi de X_2 (le cours donne $E\left(X_2\right)=2/3$) et la loi de W_2 par la question précédente, on a $E\left(W_2\right)=4/3$. Le tableau de la loi conjointe donne

$$E\left(X_2W_2\right)=4/9+4/9=8/9$$

et au final, on trouve

$$\operatorname{cov}\left(X_2,W_2\right)=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=0.$$

(d) La covariance des deux variables est nulle, mais attention, il ne s'agit pas de conclure qu'elles sont indépendantes : c'est la réciproque qui est vraie. Ici, elle ne sont pas indépendantes. On peut proposer comme contre-exemple

$$P\left(X_2=1\cap W_2=2\right)=0\neq P\left(X_2=1\right)P\left(W_2=2\right).$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

(8) On peut avoir placé tous les jetons dans la même urne (auquel cas $W_n=2$), ou dans deux urnes différentes (auquel cas $W_n=1$) ou dans les trois (ce qui donne $W_n=0$). On a donc

$$W_n(\Omega)=[\![0,2]\!].$$

(9) Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

(a) $W_{n,i}$ est une variable de Bernoulli. Son espérance est donc égale à son paramètre. L'urne 1 (resp. 2,3) est vide si $X_n = 0$ (resp. $Y_n = 0, Z_n = 0$). Les trois évènements susmentionnés ayant la même probabilité on a, pour tout $i \in \{1,2,3\}$

$$E(W_{n,i}) = P(W_{n,i} = 1) = P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Il est clair que

$$W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}.$$

(c) Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(W_n) = E(W_{n,1}) + E(W_{n,2}) + E(W_{n,3}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(10) Comme

$$[X_n = n] = [X_n = n] \cap [W_n = 2],$$

on a

$$P([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

D'autre part, si $W_n = 2$ alors tous les jetons sont placés dans la même urne et il n'est pas possible d'avoir ; chaque urne contient donc 0 ou n jetons et donc

$$P([X_n = k] \cap [W_n = 2]) = 0, \quad k \in [\![1, n-1]\!].$$

(11) On s'intéresse à l'évènement

$$[X_n = k] \cap [W_n = 1], \quad k \in [\![1, n-1]\!].$$

Cet évènement signifie qu'on a placé k des n jetons dans l'urne 1 et les $n-k$ jetons restants dans une (et même) autre urne. Il y a 2 façons de choisir la deuxième urne à remplir. Il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons de choisir les k jetons parmi les n que l'on va mettre dans l'urne 1 , les autres étant automatiquement placés dans la deuxième urne choisie. Pour chacune de ces possibilités, la probabilité est $(1/3)^n$. On a bien

$$P([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = 2\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Naturellement, si $[X_n = n]$ tous les jetons sont placés dans la même urne et il y en a deux qui restent vides ; ainsi

$$P(X_n = n \cap W_n = 1) = 0.$$

(12) Par le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
E(X_n W_n) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{2} kiP(X_n = k \cap W_n = i) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{2} kiP(X_n = k \cap W_n = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k \cap W_n = 1) + \sum_{k=1}^{n-1} 2kP(X_n = k \cap W_n = 2) + 2nP(X_n = n \cap W_n = 2) \\
&= 2nP(X_n = n \cap W_n = 2) + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k \cap W_n = 1) \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k \cap W_n = 1)
\end{aligned}$$

comme demandé.

(13) On poursuit le calcul en ajoutant le résultat obtenu plus haut. On va aussi utiliser la formule classique (dont on omet la preuve)

$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

$$\begin{aligned}
E\left(X_n W_n\right) &= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} k P\left(X_n = k \cap W_n = 1\right) \\
&= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} k 2 \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \\
&= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \\
&= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n 2^{n-1} \quad \text{(formule du binôme)} \\
&= n \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

comme demandé.
On calcule ensuite la covariance avec la même formule que plus haut. Comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3)$, on a

$$E\left(X_n\right) = \frac{n}{3}$$

Il suit que

$$C(X_n, W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n}{3} \times 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

(14) La covariance précédente est nulle, pourtant (tout comme précédemment pour n = 2) les variables X_n et W_n ne sont pas indépendantes fournissant un nouveau contre-exemple à la réciproque du résultat du cours affirmant que si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.