Essec 2013 (Corrigé)

Option Économique

Partie I - Des exemples

1. $X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.

   On sait alors que $\boxed{X_n \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n,p).}$

2. Soit $j \in \mathbb{N}$.
   D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événements $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

   $$r_j = P(X=j) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X=j]\cap[N=n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X_n=j]\cap[N=n])$$

   Comme les U_k sont indépendantes de N, toutes fonctions des U_k est aussi indépendante de N.
   En particulier X_n est indépendante de N.
   On a donc :

   $$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n=j)P(N=n) \qquad \text{c'est-à-dire :} \quad \boxed{\forall\, j\in\mathbb{N},\ \ r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n=j)p_n}$$

3. (a) Comme $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m,\pi)$, on a : $\quad N(\Omega) = [\![0,m]\!]$

   La somme $X = \sum_{k=1}^{N} U_k$ a donc au plus m termes, et comme ces termes valent au plus 1, on a :

   $$X = \sum_{k=1}^{N} U_k \leqslant \sum_{k=1}^{m} 1 = m$$

   On en déduit que : $\boxed{\forall\, j>m,\ \ r_j = P(X=j) = 0}$

   (b) Soit $j \in [\![0,m]\!]$.

   Comme $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m,\pi)$, on a : $\quad p_n = P(N=n) = \begin{cases} \binom{m}{n}\pi^n(1-\pi)^{m-n} & \text{si } 0\leqslant n\leqslant m \\ 0 & \text{si } n>m \end{cases}$

   D'après 2. on a donc :

   $$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n=j)p_n = \sum_{n=0}^{m} P(X_n=j)\binom{m}{n}\pi^n(1-\pi)^{m-n}$$

   Puis comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on a : $\quad P(X_n=j) = \begin{cases} \binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} & \text{si } 0\leqslant j\leqslant n, & \text{c'est-à-dire si } n\geqslant j \\ 0 & \text{si } j>n, & \text{c'est-à-dire si } n<j \end{cases}$

   D'où le résultat en supprimant les termes nuls de la somme et en explicitant :

   $$\boxed{\forall\, j\in[\![0,m]\!],\ \ r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\binom{m}{n}\pi^n(1-\pi)^{m-n}}$$

(c) D'un côté : $\dbinom{n}{j}\dbinom{m}{n} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}\,\dfrac{m!}{n!(m-n)!} = \dfrac{m!}{j!(n-j)!(m-n)!}$

De l'autre côté : $\dbinom{m}{j}\dbinom{m-j}{n-j} = \dfrac{m!}{j!(m-j)!}\,\dfrac{(m-j)!}{(n-j)!((m-j)-(n-j))!} = \dfrac{m!}{j!(n-j)!(m-n)!}$

D'où : $\boxed{\dbinom{n}{j}\dbinom{m}{n} = \dbinom{m}{j}\dbinom{m-j}{n-j}}$

(d) Soit $j \in [\![0,m]\!]$. D'après 3.(b), on a :

$$r_j = p^j \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j}\binom{m}{n}(1-p)^{n-j}\pi^n(1-\pi)^{m-n}$$

D'après 3.(c) et en mettant π^j en facteur, on a :

$$r_j = p^j\pi^j \sum_{n=j}^{m} \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}(1-p)^{n-j}\pi^{n-j}(1-\pi)^{m-n}$$

On obtient :

$$r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j \sum_{n=j}^{m} \binom{m-j}{n-j}\big[(1-p)\pi\big]^{n-j}(1-\pi)^{m-n}$$

En posant $\ell = n-j$, il vient :

$$\boxed{\forall\, j \in [\![0,m]\!],\ \ r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell}\big[(1-p)\pi\big]^{\ell}(1-\pi)^{m-j-\ell}}$$

(e) D'après la formule du binôme, il vient :

$$\forall\, j \in [\![0,m]\!],\ \ P(X=j) = r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j\Big[(1-p)\pi + (1-\pi)\Big]^{m-j} = \binom{m}{j}(p\pi)^j(1-p\pi)^{m-j}$$

On en déduit que $\boxed{\text{si les } U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ et si } N \hookrightarrow \mathcal{B}(m,\pi), \text{ alors } X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(m,p\pi).}$

4. (a) Comme $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ P(N=n) = e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^n}{n!}$

Soit $j \in \mathbb{N}$. En reprenant 2. on a : $\quad r_j = e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n=j)\,\frac{\lambda^n}{n!}$

Comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on a toujours : $\quad P(X_n=j) = \begin{cases} \dbinom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant n, \quad \text{c'est-à-dire si } n \geqslant j \\ 0 & \text{si } j > n, \quad \text{c'est-à-dire si } n < j \end{cases}$

Ainsi :

$$r_j = e^{-\lambda}\sum_{n=j}^{+\infty}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\,\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}p^j\lambda^j\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{n!}{j!(n-j)!}\,(1-p)^{n-j}\,\frac{\lambda^{n-j}}{n!}$$

D'où la formule :

$$\boxed{\forall\, j \in \mathbb{N},\ \ r_j = e^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^j}{j!}\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{1}{(n-j)!}\,\big[\lambda(1-p)\big]^{n-j}}$$

(b) En posant $\ell = n-j$ et en reconnaissant une série exponentielle, il vient :

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ \ P(X=j) = r_j = e^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^j}{j!}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\big[\lambda(1-p)\big]^{\ell}}{\ell!} = e^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^j}{j!}\,e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\,\frac{(\lambda p)^j}{j!}$$

On en déduit que $\boxed{\text{si les } U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ et si } N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \text{ alors } X \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(\lambda p).}$

Partie II - La loi binomiale négative

Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Par définition, si $k=0$, alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{0} = 1$. Par ailleurs, si $k \geqslant 1$, alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n.(n-1).(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$$

La formule $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(y-i)$ généralise donc bien la notion de coefficient binomial dans le cas où le paramètre du haut y est un réel.

Attention, si y est un réel, la formule $\binom{y}{k} = \frac{y!}{k!(y-k)!}$ n'a pas de sens car $y!$ n'est pas définie !

5. Pour tous $k \geqslant 1$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\binom{y}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(y-i) = \frac{y-k+1}{k} \times \frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=0}^{k-2}(y-i) \qquad \text{c'est-à-dire : } \boxed{\forall\, k \geqslant 1,\quad \binom{y}{k} = \frac{y-k+1}{k}\binom{y}{k-1}}$$

D'où l'écriture d'une fonction récursive qui calcule $\binom{y}{k}$:

```
FUNCTION cb(y:real; k:integer) :real;
BEGIN
   IF k=0 THEN cb:=1                      (* Si k=0 alors (k parmi y)=1 *)
          ELSE cb:=(y-k+1)/k*cb(y,k-1);   (* Sinon, on applique la relation de récurrence *)
END;
```

6. Soient $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in [0,1[$ fixés.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons f la fonction définie sur $[0,x]$ par :

$$\forall\, t \in [0,x],\quad f(t) = \frac{1}{(1-t)^c}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$ comme inverse d'une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$ ne s'annulant pas sur $[0,x]$. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-0)^k}{k!}\,f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Or on a, pour tout $t \in [0,x]$:

$$\begin{aligned}
&f(t) = (1-t)^{-c}\\
&f'(t) = c(1-t)^{-c-1} = c(1-t)^{-(c+1)}\\
&f''(t) = c(c+1)(1-t)^{-c-2} = c(c+1)(1-t)^{-(c+2)}\\
&f^{(3)}(t) = c(c+1)(c+2)(1-t)^{-(c+3)}\\
&\dots
\end{aligned}$$

et de façon générale :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad f^{(k)}(t) = c(c+1)(c+2)\dots(c+k-1)(1-t)^{-(c+k)}$$

Par ailleurs :

$$\binom{c+k-1}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\big((c+k-1)-i\big) = \frac{1}{k!}\,(c+k-1)(c+k-2)\dots(c+1)c = \frac{c(c+1)(c+2)\dots(c+k-1)}{k!}$$

D'où :

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N},\quad f^{(k)}(t) = k!\binom{c+k-1}{k}\frac{1}{(1-t)^{c+k}}}$$

En remplaçant dans la formule ci-dessus, on trouve :

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\,k!\binom{c+k-1}{k}\frac{1}{1^{c+k}} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,(n+1)!\binom{c+n}{n+1}\frac{1}{(1-t)^{c+n+1}}\,\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + (n+1)\binom{c+n}{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\,\mathrm{d}t$$

Or d'après la relation de récurrence du 5. on a : $\displaystyle \binom{c+n}{n+1} = \frac{c}{n+1}\binom{c+n}{n}$

Finalement en reconnaissant I_n on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} I_n}$$

(b) x et t sont deux réels tels que $0 \leqslant t \leqslant x < 1$.

Alors : $\quad x - t \geqslant 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{1-t} > 0 \qquad$ donc : $\quad \dfrac{x-t}{1-t} \geqslant 0$

Par ailleurs : $\quad x - \dfrac{x-t}{1-t} = \dfrac{x(1-t)-x+t}{1-t} = \dfrac{t-xt}{1-t} = \dfrac{t(1-x)}{1-t} \geqslant 0 \qquad$ donc : $\quad \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in [0,x],\quad 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x}$$

Par croissance de la fonction $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n \qquad (1)$$

Par ailleurs, puisque $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, on a : $\quad t \leqslant x \qquad$ donc : $\quad 1 - t \geqslant 1 - x > 0$

Par inverse : $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x} \qquad$ et :

$$0 \leqslant \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}} \qquad (2)$$

En multipliant les inégalités de nombres positifs (1) et (2), il vient :

$$0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall t \in [0,x],\quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}}$$

Par positivité de l'intégrale (avec $0 \leqslant x$) il vient :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x \mathrm{d}t = \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \times x$$

Autrement dit : $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}}$

(c) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule avec la formule donnée par l'énoncé :

$$\binom{c+n}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i) \underset{k=n-i}{=} \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(c+k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{c+k}{k} \qquad \text{d'où : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{c}{k}\right)}$$

ii. La fonction $g : t \mapsto \ln(1+t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ et on a :

$$\forall t \in]-1,+\infty[,\quad g'(t) = \frac{1}{1+t} \quad \text{et} \quad g''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \leqslant 0$$

Donc g est concave sur $]-1,+\infty[$.
Donc la courbe de g est située sous ses tangentes, et en particulier sous sa tangente en 0, qui a pour équation $y = g'(0)(t-0) + g(0)$, c'est-à-dire $y = t$.
On en déduit :

$$\boxed{\forall t \in]-1,+\infty[,\quad g(t) = \ln(1+t) \leqslant t}$$

iii. Soit k un entier $\geqslant 2$.

Comme l'inégalité ci-dessus est valable pour tout $t \in]-1,+\infty[$, on peut l'appliquer en $t = -\dfrac{1}{k}$ et on obtient :

$$\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \leqslant -\frac{1}{k}$$

Donc : $\quad \ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right) \leqslant -\dfrac{1}{k} \qquad$ donc : $\quad \ln(k-1) - \ln k \leqslant -\dfrac{1}{k}$

En multipliant cette dernière inégalité par -1, on a bien : $\boxed{\forall\, k \geqslant 2,\ \ \dfrac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)}$

<u>Remarque</u> : On se rend ici compte que la question 6.(c).ii. est mal posée, puisque l'on a besoin de l'inégalité pour tous les $t \in]-1,+\infty[$, et non pour tous les $t \in [0,+\infty[$ comme indiqué dans l'énoncé. On aurait aussi pu prouver la première inégalité de la question 6.(c).iii. indépendamment de la question 6.(c).ii. en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction ln entre $k-1$ et k.

Soit $n \geqslant 2$. En sommant les inégalités ci-dessus pour k allant de 2 à n, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \big(\ln k - \ln(k-1)\big) = \ln n - \ln 1 = \ln n \quad \text{(somme téléscopique)}$$

En ajoutant 1, on obtient : $\quad \forall\, n \geqslant 2,\ \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$

Par ailleurs pour $n = 1$ on a : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 \leqslant 1 = 1 + \ln 1$

Donc la formule générale reste valable pour $n = 1$ et finalement : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n}$

iv. D'après 6.(c).i on a : $\quad \ln\left[\dbinom{c+n}{n}\right] = \ln\left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)\right] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{c}{k}\right)$

Par 6.(c).ii avec $t = \dfrac{c}{k}$ on a : $\quad \ln\left[\dbinom{c+n}{n}\right] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{c}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{k} = c\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

D'où le résultat par 6.(c).iii : $\boxed{\ln\left[\dbinom{c+n}{n}\right] \leqslant c(1+\ln n)}$

La fonction exp étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\binom{c+n}{n} \leqslant e^{c(1+\ln n)} = e^c e^{c\ln n} = e^c n^c$$

En multipliant par x^{n+1} ($\geqslant 0$ car $x \in [0,1[$), il vient : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 \leqslant \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} \leqslant e^c n^c x^{n+1}$

Par croissance comparée, avec $x \in [0,1[$, on a : $\quad e^c n^c x^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où par encadrement : $\boxed{\dbinom{c+n}{n} x^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

(d) D'après 6.(b), on a : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 \leqslant c\dbinom{c+n}{n} I_n \leqslant c\dbinom{c+n}{n}\dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$

D'après 6.(c), on a : $\quad c\dbinom{c+n}{n}\dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par encadrement, on a donc : $\quad c\dbinom{c+n}{n} I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Enfin par 6.(a), on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c} - c\binom{c+n}{n} I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(1-x)^c}$$

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\binom{c+k-1}{k}x^k \text{ converge pour tout } x\in[0,1[}$ et que :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{c+k-1}{k}x^k=\frac{1}{(1-x)^c}}$$

7. Par définition des coefficients binomiaux étendue aux réels, on a :

$$\binom{r+k-1}{k}=\begin{cases}1\geqslant 0 & \text{si } k=0\\ \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}\big(r+\underbrace{k-1-i}_{\geqslant 0}\big)\geqslant 0 & \text{si } k\geqslant 1\end{cases}$$

Comme $p\in]0,1[$, on a : $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ p_k=\binom{r+k-1}{k}(1-p)^kp^r\geqslant 0}$

Par ailleurs en posant $c=r$ et $x=1-p$, on sait d'après 6.(d) que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k$ converge.

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}p_k \text{ converge}}$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}p_k=p^r\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\underset{6.(d)}{=}\frac{p^r}{\big(1-(1-p)\big)^r}=\frac{p^r}{p^r}\qquad\text{c'est-à-dire : }\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}p_k=1}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } \big((k,p_k)\big)_{k\in\mathbb{N}} \text{ définit bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans } \mathbb{N}.}$

Remarques :

- On notera $\mathcal{BN}(r,p)$ la loi binomiale négative de paramètres r et p. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } X\hookrightarrow\mathcal{BN}(r,p),\text{ alors : }\ X(\Omega)=\mathbb{N}\ \text{ et }\ \forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\binom{r+k-1}{k}(1-p)^kp^r}$$

- Si $X\hookrightarrow\mathcal{BN}(r,p)$ avec $r\in\mathbb{N}^*$, alors X donne le nombre d'échecs obtenus avant le r-ième succès, lorsque l'on effectue une suite d'épreuves identiques et indépendantes avec probabilité de succès égale à p. Cela se démontre sans difficulté en s'inspirant de l'étude de la loi du rang du r-ième succès.

8. Si $Y\hookrightarrow\mathcal{BN}(1,p)$, on a :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ P(Y=k)=\binom{k}{k}(1-p)^kp=p(1-p)^k$$

Alors : $\forall i\in\mathbb{N}^*,\ P(Y+1=i)=P(Y=i-1)=p(1-p)^{i-1}$

$\boxed{\text{Donc si } Y\hookrightarrow\mathcal{BN}(1,p),\text{ alors } Y+1 \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}(p).}$

9. (a) Attention ici on ne peut pas procéder comme en 3.(c) et utiliser les factorielles car r est un réel.

Si $k=1$, on a :

$$k\binom{r+k-1}{k}=\binom{r}{1}=\prod_{i=0}^{0}(r-i)=r\qquad\text{et}\qquad r\binom{r+k-1}{k-1}=r\binom{r}{0}=r\times 1=r$$

Donc pour $k=1$, on a : $k\dbinom{r+k-1}{k}=r\dbinom{r+k-1}{k-1}$

Si $k\geqslant 2$, on a :

$$k\binom{r+k-1}{k}=\frac{k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(r+k-1-i)=\big((r+k-1)-(k-1)\big)\frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=0}^{k-2}(r+k-1-i)=r\binom{r+k-1}{k-1}$$

On a donc bien : $\boxed{\forall k\geqslant 1,\ k\binom{r+k-1}{k}=r\binom{r+k-1}{k-1}}$

(b) Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(Z=k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r = \sum_{k=1}^{n} r\binom{r+k-1}{k-1}(1-p)^k p^r$$

On pose $i = k-1$:

$$\sum_{k=0}^{n} kP(Z=k) = \sum_{i=0}^{n-1} r\binom{r+i}{i}(1-p)^{i+1}p^r = rp^r(1-p)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{(r+1)+i-1}{i}(1-p)^i$$

D'après la formule du binôme négatif avec $c = r+1$, la série $\sum_{i\geqslant 0}\binom{(r+1)+i-1}{i}(1-p)^i$ converge.

Donc $\sum_{k\geqslant 0} kP(Z=k)$ converge (absolument, car c'est une série à termes positifs).

On en déduit que $\boxed{Z \text{ admet une espérance,}}$ donnée par :

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(Z=k) = rp^r(1-p)\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{(r+1)+i-1}{i}(1-p)^i = rp^r(1-p)\,\frac{1}{(1-(1-p))^{r+1}}$$

On obtient : $\boxed{E(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}}$

(c) De même :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(Z=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r = \sum_{k=2}^{n} r(k-1)\binom{r+k-1}{k-1}(1-p)^k p^r$$

Or d'après 9.(a), on a aussi :

$$\begin{aligned}\forall\, k \geqslant 2,\ \ (k-1)\binom{r+k-1}{k-1} &= (k-1)\binom{(r+1)+(k-1)-1}{k-1} \\ &= (r+1)\binom{(r+1)+(k-1)-1}{k-2} \\ &= (r+1)\binom{r+k-1}{k-2}\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(Z=k) = \sum_{k=2}^{n} r(r+1)\binom{r+k-1}{k-2}(1-p)^k p^r \underset{i=k-2}{=} r(r+1)p^r(1-p)^2\sum_{i=0}^{n-2}\binom{(r+2)+i-1}{i}(1-p)^i$$

D'après la formule du binôme négatif avec $c = r+2$, la série $\sum_{i\geqslant 0}\binom{(r+2)+i-1}{i}(1-p)^i$ converge.

Donc $\sum_{k\geqslant 0} k(k-1)P(Z=k)$ converge (absolument).

D'après le théorème du transfert, on en déduit que $\boxed{Z(Z-1) \text{ admet une espérance,}}$ donnée par :

$$E(Z(Z-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(Z=k) = r(r+1)p^r(1-p)^2\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{(r+2)+i-1}{i}(1-p)^i = r(r-1)p^r(1-p)^2\,\frac{1}{p^{r+2}}$$

On obtient : $\boxed{E(Z(Z-1)) = \dfrac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2}}$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $Z^2 = Z(Z-1) + Z$ admet une espérance.
Donc $\boxed{Z \text{ admet une variance}}$ et on a :

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = E(Z(Z-1)) + E(Z) - (E(Z))^2$$

On remplace :

$$V(Z) = \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{r(1-p)}{p} - \left(\frac{r(1-p)}{p}\right)^2$$

On factorise :

$$V(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}\big((r+1)(1-p) + p - r(1-p)\big) = \frac{r(1-p)}{p^2}\big(\underbrace{r - pr + 1 - p + p - r + pr}_{=1}\big)$$

D'où le résultat : $\boxed{V(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}}$

Partie III - Les lois de Panjer

10. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(k)$ la proposition : "$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$".

- Initialisation : Par définition de p_1, on a : $\quad p_0 \prod_{i=1}^{1} \left(a + \frac{b}{i}\right) = \left(a + \frac{b}{1}\right) p_0 = p_1 \qquad$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité : On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Par définition de p_{k+1} puis par hypothèse de récurrence, on a :

$$p_{k+1} = \left(a + \frac{b}{k+1}\right) p_k = \left(a + \frac{b}{k+1}\right) p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{k+1} \left(a + \frac{b}{i}\right)$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \;\; p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)}$

(b) Si $a = 0$, la formule ci-dessus se réécrit :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \;\; p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{b}{i} = p_0 \frac{b^k}{k!} \qquad \text{(formule qui reste valable pour } k = 0\text{)}$$

Comme $N(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, donc : $\quad p_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} = 1$

On obtient : $\quad p_0 e^b = 1 \qquad$ d'où : $\quad p_0 = e^{-b} \qquad$ et enfin : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \;\; p_k = e^{-b} \frac{b^k}{k!}$

$\boxed{\text{La loi de Panjer } \mathcal{P}(a,b) \text{ avec } a = 0 \text{ correspond donc à la loi de Poisson } \mathcal{P}(b).}$

(c) i. On suppose par l'absurde que tous les p_k sont strictement positifs.

On a : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \;\; p_{k+1} = \left(a + \frac{b}{k+1}\right) p_k = (ak+b) \frac{p_k}{k+1}$

On en déduit : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \;\; ak + b = \frac{(k+1)p_{k+1}}{p_k} > 0$

Or $a < 0$, donc : $\quad ak + b \xrightarrow[k \to +\infty]{} -\infty \qquad$ et il existe donc un rang k tel que : $\quad ak + b \leqslant 0$

Nous venons d'aboutir à une contradiction.

$\boxed{\text{On en déduit qu'il existe un entier naturel } k_0 \text{ tel que } p_{k_0} = 0.}$

Notons $r+1$ le plus petit indice k tel que p_k soit nul : $\quad \forall\, k \leqslant r, \;\; p_k > 0 \quad$ et $\quad p_{r+1} = 0$
La relation de récurrence entre les p_k donne alors : $\quad p_{r+2} = 0 \quad$ puis : $\quad p_{r+3} = 0 \quad$ etc.
De proche en proche on montre que : $\quad \forall\, k \geqslant r+1, \;\; p_k = 0$

Finalement il existe bien un unique entier naturel r tel que :

$$\boxed{\forall\, k \leqslant r, \;\; p_k > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k > r, \;\; p_k = 0}$$

Notons en particulier que dans ce cas $\boxed{N(\Omega) = [\![0, r]\!].}$

ii. D'après la relation de récurrence définissant les p_k, on a :

$$0 = p_{r+1} = \left(a + \frac{b}{r+1}\right) p_r$$

Comme $p_r \neq 0$, on a : $\quad a + \frac{b}{r+1} = 0 \qquad$ et donc : $\quad \boxed{b = -a(r+1)}$

Remarque : Si $a < 0$ le second paramètre b de la loi de Panjer $\mathcal{P}(a,b)$ ne peut être choisi n'importe comment puisque $b/a = -(r+1)$ est obligatoirement un entier négatif.

iii. Pour $k=0$, on a : $\quad (-a)^k\binom{r}{k}p_0 = \binom{r}{0}p_0 = 1\times p_0 = p_0$

et pour $k \in [\![1,r]\!]$ on a d'après 10.(a) :

$$p_k = p_0\prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right) \underset{10.\text{(c).ii}}{=} p_0\prod_{i=1}^{k}\left(a-\frac{a(r+1)}{i}\right) = p_0\prod_{i=1}^{k}\frac{(-a)(r+1-i)}{i}$$

Il vient :

$$p_k = p_0\frac{\left(\prod_{i=1}^{k}(-a)\right)\left(\prod_{i=1}^{k}(r+1-i)\right)}{\prod_{i=1}^{k} i} \underset{j=i-1}{=} \frac{p_0(-a)^k}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(r-j) = p_0(-a)^k\binom{r}{k}$$

D'où : $\boxed{\forall\, k\in[\![0,r]\!],\ \ p_k = (-a)^k\binom{r}{k}p_0}$

On a vu que $N(\Omega) = [\![0,r]\!]$, donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} p_k = 1$

On en déduit : $\displaystyle p_0\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-a)^k = 1$

D'après la formule du binôme, on a : $\quad p_0(1-a)^r = 1 \qquad$ d'où : $\boxed{p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}}$

iv. On a donc, pour tout $k\in[\![0,r]\!]$:

$$p_k = (-a)^k\binom{r}{k}\frac{1}{(1-a)^r} = \binom{r}{k}\left(\frac{-a}{1-a}\right)^k\left(\frac{1}{1-a}\right)^{r-k} = \binom{r}{k}\left(\frac{-a}{1-a}\right)^k\left(1-\frac{-a}{1-a}\right)^{r-k}$$

Comme $a<0$, on a $0<-a<1-a$ et : $\quad 0 < \dfrac{-a}{1-a} < 1$

On en déduit que N suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(r\,,\ \dfrac{-a}{1-a}\right)$.

Or $b = -a(r+1)$, donc : $\quad r = -1-\dfrac{b}{a}$

$\boxed{\text{La loi de Panjer } \mathcal{P}(a,b) \text{ avec } a<0 \text{ correspond donc à la loi binomiale } \mathcal{B}\left(-1-\dfrac{b}{a}\,,\ -\dfrac{a}{1-a}\right).}$

(d) i. Pour $k=0$, on a : $\quad \binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k p_0 = \binom{\frac{b}{a}}{0}p_0 = 1\times p_0 = p_0$

et pour $k\geqslant 1$ on a d'après 10.(a) :

$$p_k = p_0\prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right) = p_0\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{a}{i}\left(\frac{b}{a}+i\right)\right] = \frac{p_0a^k}{k!}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{b}{a}+i\right)$$

On pose $j=i-k$:

$$p_k = \frac{p_0a^k}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{b}{a}+k-j\right) = p_0a^k\binom{\frac{b}{a}+k}{k}$$

On a donc bien : $\boxed{\forall\, k\in\mathbb{N},\ \ p_k = \binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^kp_0}$

ii. La relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}p_k = 1$ donne : $\quad \displaystyle p_0\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k = 1$

Comme $0<a<1$ par hypothèse, on a d'après la formule du binôme négatif : $\quad p_0\dfrac{1}{(1-a)^{\frac{b}{a}+1}} = 1$

D'où : $\quad p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1} \qquad$ et : $\quad \forall\, k\in\mathbb{N},\ \ p_k = \binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k(1-a)^{\frac{b}{a}+1}$

En identifiant avec la formule de la question 7, on constate que N suit la loi binomiale négative de paramètres $\dfrac{b}{a}+1$ et $1-a$.

$$\boxed{\text{La loi de Panjer } \mathcal{P}(a,b) \text{ avec } 0<a<1 \text{ correspond donc à la loi binomiale négative } \mathcal{BN}\left(1+\frac{b}{a}\,,\,1-a\right).}$$

11. Une variable alétoire suivant une loi de Poisson, une loi binomiale ou loi binomiale négative admet une espérance et une variance.
La loi de Panjer correspondant à l'une de ces trois lois, on sait déjà que $\boxed{N \text{ admet une espérance et une variance.}}$

- Si $a=0$, alors $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ et on a :

$$E(N)=b=\frac{0+b}{1-0} \qquad \text{et} \qquad V(N)=b=\frac{0+b}{(1-0)^2}$$

- Si $a<0$, alors $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-1-\frac{b}{a}\,,\,-\frac{a}{1-a}\right)$ et on a :

$$E(N)=\left(-1-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right)=(a+b)\,\frac{1}{1-a}=\frac{a+b}{1-a}$$

et :

$$V(N)=\left(-1-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right)\left(1+\frac{a}{1-a}\right)=\frac{a+b}{1-a}\,\frac{1}{1-a}=\frac{a+b}{(1-a)^2}$$

- Si $0<a<1$, alors $N \hookrightarrow \mathcal{BN}\left(1+\frac{b}{a}\,,\,1-a\right)$ et on a d'après la question 9. :

$$E(N)=\frac{(1+\frac{b}{a})a}{1-a}=\frac{a+b}{1-a} \qquad \text{et} \qquad V(N)=\frac{(1+\frac{b}{a})a}{(1-a)^2}=\frac{a+b}{(1-a)^2}$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{Si } N \hookrightarrow \mathcal{P}(a,b), \text{ alors : } \quad E(N)=\frac{a+b}{1-a} \quad \text{et} \quad V(N)=\frac{a+b}{(1-a)^2}}$

Partie IV - L'algorithme de Panjer

12. Une somme de nombres positifs est nulles si et seulement si tous ces nombres sont nuls.
On a donc :

$$X_n=0 \iff \sum_{k=1}^{n} U_k=0 \iff \forall\, k\in [\![1,n]\!],\ \ U_k=0$$

Ainsi : $\quad [X_n=0]=\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}[U_k=0]$

Les U_k étant supposées indépendantes, on a : $\quad P(X_n=0)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}P(U_k=0)$

Les U_k suivent la même loi, donc : $\quad \forall\, k\in [\![1,n]\!],\ \ P(U_k=0)=P(U_1=0)=q_0$

Ainsi : $\quad P(X_n=0)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}q_0 \quad$ c'est-à-dire : $\boxed{P(X_n=0)=(q_0)^n}$

L'application de la formule des probabilités totales vue dans la question 2. reste valable ici, donc :

$$r_0=P(X=0)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_n=0)p_n \qquad \text{c'est-à-dire :} \quad \boxed{r_0=\sum_{n=0}^{+\infty}(q_0)^n p_n}$$

13. (a) Sachant $[X_n=j]$, X_n suit la loi constante égale à j. On a donc : $\boxed{E_{[X_n=j]}(X_n)=j}$

Or $X_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}U_k$, donc par linéarité de l'espérance :

$$j=E_{[X_n=j]}(X_n)=\sum_{k=1}^{n}E_{[X_n=j]}(U_k)$$

Comme les U_k sont indépendantes de même loi, on a : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \ E_{[X_n=j]}(U_k) = E_{[X_n=j]}(U_1)$
On en déduit :

$$j = E_{[X_n=j]}(X_n) = n \times E_{[X_n=j]}(U_1)$$

Finalement : $\boxed{E_{[X_n=j]}(U_1) = \dfrac{j}{n}}$

(b) Toujours d'après la question 2. : $r_j = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j)p_n$

Or par définition $X_0 = 0$ et $j \geqslant 1$, donc : $P(X_0 = j) = 0$

On en déduit que : $r_j = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j)p_n$

Enfin, comme N suit la loi de Panjer $\mathcal{P}(a,b)$, on a bien : $\boxed{r_j = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j)\left(a + \frac{b}{n}\right)p_{n-1}}$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E_{[X_n=j]}\left(a + \frac{b}{j}\,U_1\right) = E_{[X_n=j]}(a) + \frac{b}{j}\,E_{[X_n=j]}(U_1) \underset{13.(a)}{=} a + \frac{b}{j}\,\frac{j}{n} = a + \frac{b}{n}$$

On a donc bien : $\boxed{r_j = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j)E_{[X_n=j]}\left(a + \frac{b}{j}\,U_1\right)p_{n-1}}$

(c) D'après le théorème du transfert, on a :

$$P(X_n = j)E_{[X_n=j]}\left(a + \frac{b}{j}\,U_1\right) = P(X_n = j)\sum_{i=0}^{+\infty}\left(a + \frac{b}{j}\,i\right)P_{[X_n=j]}(U_1 = i)$$

On a $U_1 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k = X_n$, donc : $\forall i > j,\ \ P_{[X_n=j]}(U_1 = i) = 0$

On obtient :

$$P(X_n = j)E_{[X_n=j]}\left(a + \frac{b}{j}\,U_1\right) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right)P_{[X_n=j]}(U_1 = i)P(X_n = j)$$

Par ailleurs :

$$P_{[X_n=j]}(U_1 = i)P(X_n = j) = P([U_1 = i] \cap [X_n = j]) = P([U_1 = i] \cap [U_2 + U_3 + \cdots + U_n = j - i])$$

Les U_k étant indépendantes, U_1 est indépendante de $U_2 + U_3 + \cdots + U_n$.
Donc :

$$P_{[X_n=j]}(U_1 = i)P(X_n = j) = P(U_1 = i)P(U_2 + U_3 + \cdots + U_n = j - i)$$

Les U_k étant indépendantes de même loi, $U_2 + U_3 + \cdots + U_n$ suit la même loi que $U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1} = X_{n-1}$.
Ainsi :

$$P_{[X_n=j]}(U_1 = i)P(X_n = j) = P(U_1 = i)P(U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1} = j - i) = P(U_1 = i)P(X_{n-1} = j - i)$$

On a bien prouvé la formule voulue :

$$\boxed{P(X_n = j)E_{[X_n=j]}\left(a + \frac{b}{j}\,U_1\right) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right)P(U_1 = i)P(X_{n-1} = j - i)}$$

(d) D'après 13.(b) et 13.(c), il vient :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right)P(U_1 = i)P(X_{n-1} = j - i)p_{n-1}$$

Avec $q_i = P(U_1 = i)$, il vient :

$$r_j = \sum_{i=0}^{j}\left[\left(a + \frac{bi}{j}\right)q_i\sum_{n=1}^{+\infty}P(X_{n-1} = j - i)p_{n-1}\right]$$

On pose $\ell = n-1$:
$$r_j = \sum_{i=0}^{j} \left[\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(X_\ell = j-i) p_\ell \right]$$
Toujours par la formule du 2. on obtient :
$$r_j = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i P(X = j-i) \qquad \text{c'est-à-dire :} \quad \boxed{r_j = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}}$$

On isole le terme en $i = 0$: $\quad r_j = \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i} + a q_0 r_j$

Ainsi : $\quad (1 - a q_0) r_j = \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$

D'où :
$$\boxed{r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (q_0)^n p_n \qquad \text{et} \qquad \forall j \geqslant 1,\ r_j = \frac{1}{1 - a q_0} \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}}$$

14. (a) i. Ici les $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, donc : $\quad q_i = P(U_1 = i) = \begin{cases} 1-p & \text{si } i = 0 \\ p & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$

La formule ci-dessus se réduit donc au terme en $i = 1$:
$$\forall j \geqslant 1,\ r_j = \frac{1}{1 - a(1-p)} \left(a + \frac{b}{j}\right) p\, r_{j-1} = \frac{p}{1 - (1-p)a} \left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}$$

En posant $\boxed{a' = \dfrac{ap}{1-(1-p)a}}$ et $\boxed{b' = \dfrac{bp}{1-(1-p)a},}$ on a : $\boxed{\forall j \geqslant 1,\ r_j = \left(a' + \dfrac{b'}{j}\right) r_{j-1}}$

On a $r_j = P(X = j)$: pour déduire de la relation de récurrence ci-dessus que X suit la loi de Panjer $\mathcal{P}(a', b')$, il nous reste à prouver que $a' < 1$ et $a' + b' > 0$.

a et b étant les paramètres d'une loi de Panjer, on sait que $a < 1$ et que $a + b > 0$.

On sait de plus que $0 < p < 1$, donc aussi que $0 < 1 - p < 1$.

Si $a \leqslant 0$, alors $ap \leqslant 0$ et $1 - (1-p)a > 0$, donc $a' = \dfrac{ap}{1-(1-p)a} \leqslant 0$.

Si $0 < a < 1$, alors $[1 - (1-p)a] - ap = 1 - a > 0$, donc $1 - (1-p)a > ap > 0$ et $a' = \dfrac{ap}{1-(1-p)a} < 1$.

Dans tous les cas, on a : $\boxed{a' < 1}$

Par ailleurs, on a : $\quad a' + b' = \dfrac{(a+b)p}{1-(1-p)a}$

On a vu ci-dessus que dans tous les cas $1 - (1-p)a > 0$ et on sait aussi que $a + b > 0$ et $p > 0$.

D'où : $\boxed{a' + b' > 0}$

De tout ce qui précède, on déduit que $\boxed{X \text{ suit la loi de Panjer } \mathcal{P}(a', b').}$

ii. • On suppose que $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)$.

D'après la question 10.(c).iv, cela revient à dire que N suit une loi de Panjer de paramètres a et b tels que :
$$m = -1 - \frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad \pi = -\frac{a}{1-a}$$
On résout : $\quad (1-a)\pi = -a \qquad$ donc : $\quad a(1-\pi) = -\pi \qquad$ donc : $\quad a = -\dfrac{\pi}{1-\pi}$

Puis : $\quad b = -a(m+1) = \dfrac{\pi(m+1)}{1-\pi}$

D'après la question précédente, on sait alors que X suit la loi de Panjer $\mathcal{P}(a', b')$ avec :
$$a' = \frac{ap}{1-(1-p)a} = \frac{-\pi p}{(1-\pi) + (1-p)\pi} = -\frac{-\pi p}{1 - \pi p}$$

et :
$$b' = \frac{bp}{1-(1-p)a} = \frac{(m+1)\pi p}{1-\pi p}$$
Comme $a' < 0$, on sait alors toujours par 10.(c).iv que N suit une loi binomiale de premier paramètre :
$$-1 - \frac{b'}{a'} = -1 + (m+1) = m$$
et de second paramètre :
$$-\frac{a'}{1-a'} = \frac{\pi p}{(1-\pi p)+\pi p} = \pi p$$
Autrement dit $\boxed{\text{si les } U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ et si } N \hookrightarrow \mathcal{B}(m,\pi), \text{ alors } X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,\pi p).}$
On retrouve bien le résultat de la question 3.

- On suppose que $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
D'après la question 10.(b), cela revient à dire que N suit une loi de Panjer de paramètres a et b tels que :
$$a = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda = b$$
D'après la question précédente, on sait alors que X suit la loi de Panjer $\mathcal{P}(a', b')$ avec :
$$a' = \frac{ap}{1-(1-p)a} = 0 \qquad \text{et} \qquad b' = \frac{bp}{1-(1-p)a} = \lambda p$$
Comme $a' = 0$, on sait alors toujours par 10.(b) que N suit une loi de Poisson de paramètre $b' = \lambda p$.
Autrement dit $\boxed{\text{si les } U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ et si } N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \text{ alors } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).}$
On retrouve bien le résultat de la question 4.

(b) i. On pose : $\quad \forall\, i \geqslant 1,\ \ q_i = \alpha\, \dfrac{p^i}{i}$

Les q_i sont tous $\geqslant 0$ si et seulement si $\alpha \geqslant 0$.

Puis on note que $i^2 q_i = \alpha i p^i \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée avec $p \in]-1, 1[$. Donc : $\quad q_i \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{i^2}\right)$

De plus : $\quad \forall\, i \geqslant 1,\ \ q_i \geqslant 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{i^2} \geqslant 0$

et $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{i^2}$ converge, comme série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

Par comparaison de séries à termes positifs, on sait alors que $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} q_i$ converge et on a :
$$\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p^i}{i}}_{>0} = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p^i}{i}}$$

$\boxed{\text{D'où l'existence d'un unique réel } \alpha \text{ tel que la famille } \big((i, q_i)\big)_{i \geqslant 1} \text{ définissent une loi de probabilité.}}$

ii. D'après la relation du 13.(d), on a :
$$\forall\, j \geqslant 1,\ \ r_j = \frac{1}{1-aq_0} \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) \alpha\, \frac{p^i}{i} r_{j-i} \underset{a=0}{=} \sum_{i=1}^{j} \frac{bi}{j}\, \alpha\, \frac{p^i}{i} r_{j-i}$$

D'où la formule : $\quad \boxed{\forall\, j \geqslant 1,\ \ r_j = \dfrac{b\alpha}{j} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}}$

iii. Pour $j \geqslant 2$, on a :
$$r_j = \frac{b\alpha}{j}\, p\, r_{j-1} + \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=2}^{j} p^i r_{j-i} \underset{\ell = i-1}{=} \frac{b\alpha}{j}\, p\, r_{j-1} + \frac{b\alpha}{j} \sum_{\ell=1}^{j-1} p^{\ell+1} r_{(j-1)-\ell}$$

On obtient :
$$r_j = \frac{b\alpha}{j}\, p\, r_{j-1} + \frac{j-1}{j}\, p\, \underbrace{\frac{b\alpha}{j-1} \sum_{\ell=1}^{j-1} p^{\ell} r_{(j-1)-\ell}}_{= r_{j-1}} = \frac{b\alpha}{j}\, p\, r_{j-1} + \frac{j-1}{j}\, p\, r_{j-1} = \left(\frac{b\alpha}{j}\, p + p - \frac{p}{j}\right) r_{j-1}$$

On réorganise et on trouve bien : $\boxed{\forall j \geqslant 2,\ \ r_j = \left(p + \dfrac{(b\alpha - 1)p}{j}\right) r_{j-1}}$

D'après la question précédente, on a : $\quad r_1 = \dfrac{b\alpha}{1} \displaystyle\sum_{i=1}^{1} p^i r_{1-i} = b\alpha p\, r_0$

Or : $\quad \left(p + \dfrac{(b\alpha - 1)p}{1}\right) r_0 = b\alpha p\, r_0 = r_1$

Donc la formule démontrée dans le cas général $j \geqslant 2$ est encore valable si $j = 1$.

On a : $\quad \boxed{\forall j \geqslant 1,\ \ r_j = \left(p + \dfrac{(b\alpha - 1)p}{j}\right) r_{j-1}}$

iv. En posant $\boxed{a' = p}$ et $\boxed{b' = (b\alpha - 1)p,}$ on a : $\quad \boxed{\forall j \geqslant 1,\ \ r_j = \left(a' + \dfrac{b'}{j}\right) r_{j-1}}$

Pour déduire de cette relation de récurrence que X suit la loi de Panjer $\mathcal{P}(a', b')$, il nous reste à prouver que $a' < 1$ et $a' + b' > 0$.
Comme $a' = p \in]0, 1[$, on a immédiatement $a' < 1$.
Par ailleurs $a = 0$ et b étant les paramètres d'une loi de Panjer, on sait en particulier que $b = a + b > 0$.
Comme de plus $\alpha > 0$, on a : $\quad a' + b' = p + (b\alpha - 1)p = b\alpha > 0$
De tout ce qui précède, on déduit que $\boxed{X \text{ suit la loi de Panjer } \mathcal{P}(a', b').}$
Comme $0 < a' < 1$, on sait d'après 10.(d) que X suit une loi binomiale négative de paramètres :

$$1 + \frac{b'}{a'} = 1 + \frac{(b\alpha - 1)p}{p} = b\alpha \qquad \text{et} \qquad 1 - a' = 1 - p$$

Autrement dit $\boxed{\text{si les } U_k \text{ suivent la loi du 14.(b).i et si } N \hookrightarrow \mathcal{P}(b), \text{ alors } X \hookrightarrow \mathcal{BN}(b\alpha, 1 - p).}$

<u>Remarque</u> :

D'après la question 12, on a : $\quad r_0 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n = p_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} 0^n p_n}_{=0} = P(N = 0) = e^{-b}$ $\quad$ puisque $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$

D'un autre côté, avec la formule générale de la loi binomiale négative, on a :

$$r_0 = P(X = 0) = \binom{b\alpha - 1}{0} p^0 (1 - p)^{\alpha b} = (1 - p)^{\alpha b}$$

On a donc : $\quad (1 - p)^{\alpha b} = e^{-b} \qquad$ d'où : $\quad \alpha b \ln(1 - p) = -b$

On en déduit enfin : $\quad \boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p^i}{i} = \alpha = -\ln(1 - p)}$