Devoir Maison n° 4

À rendre le 20/10/23

Exercice 1 - Obligatoire

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP + X^2P'(X+1) \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et que c'est une application linéaire.
2. Calculer une base de $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.
3. Cette application est elle injective ? Est elle surjective ? Bijective ?

Exercice 2 - Obligatoire

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_22(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer une base de $Im(f)$, $Ker(f)$ et de $Im(f) \cap Ker(f)$.
3. Cette application est elle injective ? Est elle surjective ? Bijective ?

Exercice facultatif

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$.

On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$

   (a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, \quad u(S) \in \mathcal{S}_2$.

   (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Calculs Matriciels

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer $D = P^{-1}MP$. Exprimer M en fonction de D
2. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.
3. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.