Correction du DM n° 4

Le 6/11/23

Exercice

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\mapsto XP + X^2P'(X+1) \end{aligned}$$

1. Soit P un polynôme de degré au plus 2. Alors XP est de degré au plus 3 et comme P' est de degré au plus $2 - 1$, $P'(X + 1)$ est de degré au plus $1 + 2$. De plus

$$\deg(XP + X^2P'(X + 1)) \leq \max(\deg(XP, X^2P'(X + 1))) \leq 3$$

L'application est bien définie. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, et λ un réel.

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= X(P + \lambda Q) + X^2(P + \lambda Q)'(X + 1) \\ &= XP + \lambda XQ + X^2(P' + \lambda Q')(X + 1) \\ &= XP + \lambda XQ + X^2(P'(X + 1) + \lambda Q'(X + 1)) \\ &= XP + \lambda XQ + X^2P'(X + 1) + \lambda X^2Q'(X + 1) \\ &= XP + X^2P'(X + 1) + \lambda(XQ + X^2Q'(X + 1)) \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

f est bien définie et est une application linéaire

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on note

$$P = aX^2 + bX + c \quad Q = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$$

$$\begin{aligned} f(P) = Q &\Leftrightarrow X(aX^2 + bX + c) + X^2(2a(X + 1) + b) = Q \\ &\Leftrightarrow aX^3 + bX^2 + cX + X^2(2aX + 2a + b) = Q \\ &\Leftrightarrow 3aX^3 + (2a + 3b)X^2 + cX = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a &= \alpha \\ 2a + 3b &= \beta \\ c &= \gamma \\ 0 &= \delta \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système est sous forme étagée. Q admet des antécédents *sietseulement* si $\delta = 0$

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{\alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta / \delta = 0\} \\ &= \{\alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta / \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{vect}(X^3, X^2, X) \end{aligned}$$

Et comme X^3, X^2, X est une sous famille de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, elle est aussi libre

Une base de $\text{Im } f$ est (X, X^2, X^3) .

$$\begin{aligned}
P \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f(P) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3a & = 0 \\ 2a + 3b & = 0 \\ & c = 0 \\ & 0 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 0 \\ 0 + 3b & = 0 \\ & c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow P = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ker } f = \{0\}.}$$

Remarque : D'habitude on calcule $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$ que dans le cas où f est un endomorphisme, c'est à dire l'ensemble d'arrivé est égale à l'ensemble de départ, mais ici cela à un sens car $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}_3[X] \subset \mathbb{R}[X]$

$$\boxed{\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}.}$$

Remarque : Par convention la base de $\{0\}$ est $\emptyset$.

3. Comme $\text{Ker } f = \{0\}$ f est injective mais comme $\text{Im } f \neq \mathbb{R}_3[X]$, elle n'est pas surjective.

$$\boxed{f \text{ est injective mais non surjective, donc non bijective}}$$

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\
M &\mapsto AM
\end{aligned}$$

1. Soit M et N deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel.

$$\begin{aligned}
f(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) \\
&= AM + \lambda AN \\
&= f(M) + \lambda f(N)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$$

Remarque : f est bien définie car le produit de deux matrices 2×2 est une matrice 2×2 .

2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f(M) = N &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ -x-z & -y-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z & = & a \\ & y & +t & = & b \\ -x & -y & & = & c \\ & -y & -t & = & d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z & = & a \\ & y & +t & = & b \\ & & 0 & = & c+a \\ & & 0 & = & d+b \end{cases} \end{aligned}$$

N admet des antécédents par f si et seulement si $c + a = 0$ et $d + b = 0$

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid c + a = 0 \text{ et } d + b = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Comme ces **deux** matrices ne sont pas proportionnelles

Une base de $\text{Im } f$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$M \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(M) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x & +z & = & 0 \\ & y & +t & = & 0 \\ & & 0 & = & 0+0 \\ & & 0 & = & 0+0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} & & z & = & -x \\ & & +t & = & -y \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid z = -x, t = -y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid z = -x, t = -y \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

et comme ces deux matrices ne sont pas proportionnelles

Une base de $\text{Ker } f$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

On constate que $\text{Ker } f = \text{Im } f$ donc

$$\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \text{Ker } f$$

Une base de $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Comme le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, f n'est pas injective, et comme $\text{Im } f$ n'est pas égal à l'ensemble d'arrivé f n'est pas surjective.

f n'est ni injective, ni surjective ni bijective.

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Apres calculs nous trouvons

$AFA = 4H$, $AGA = 12H + 4G$ et $AHA = 6G + 9H$

2. On rappelle que qu'une matrice M est symétrique si et seulement si ${}^tM = M$. La matrice nulle est symétrique car ${}^t0 = 0$ donc

$$0 \in \mathcal{S}_2$$

Soit M et N deux vecteurs de $\mathcal{S}_2$ et λ et μ deux réels

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) &= \lambda \cdot {}^tM + \mu \cdot {}^tN && \text{linéarité de la transposition} \\ &= \lambda \cdot M + \mu \cdot N && \text{définition d'une matrice symétrique} \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{S}_2$$

$\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque : On peut aussi remarquer que $\mathcal{S}_2$ est le noyau de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_2 &\rightarrow \mathcal{M}_2 \\ M &\mapsto {}^tM - M \end{aligned}$$

ce qui démontre que c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$. On voit que

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle/ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc pour $M \in \mathcal{S}_2$ il existe un unique triplet a, b et c tels que

$$M = aF + bG + cH$$

La famille (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$.

On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$

(a) On sait que A est symétrique.

Soit $S \in \mathcal{S}_2$ alors

$$\begin{aligned}
 {}^t u(S) &= {}^t (ASA) \\
 &= {}^t A {}^t S {}^t A \\
 &= ASA && \text{les matrices sont symétriques} \\
 &= u(S)
 \end{aligned}$$

Pour toute matrice symétrique S son image $u(S)$ est une matrice symétrique.

(b) On vient de montrer que u est une application de $\mathcal{S}_2$ dans lui même. Il nous reste à montrer que c'est une application linéaire.

Soit M et N deux vecteurs de $\mathcal{S}_2$ et λ et μ deux réels

$$\begin{aligned}
 u(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N)A \\
 &= (\lambda AM + \mu AN)A && \text{distributivité} \\
 &= \lambda AMA + \mu ANA && \text{distributivité} = \lambda s(M) + \mu s(N)
 \end{aligned}$$

L'application s est un endomorphisme de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Calculs Matriciels

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. On trouve

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow M &= [0, 0, 4; 0, 4, 6; 4, 12, 9] \\
 M &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 0. & 0. & 4. \\
 0. & 4. & 6. \\
 4. & 12. & 9.
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow P &= [4, 4, 1; 3, -2, 2; -4, 1, 4] \\
 P &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 4. & 4. & 1. \\
 3. & -2. & 2. \\
 -4. & 1. & 4.
 \end{array}$$

$$\longrightarrow P_i = \text{inv}(P)$$

Pi =

```
0.08    0.12   -0.08
0.16   -0.16    0.04
0.04    0.16    0.16
```

—> inv(P)*M*P
ans =

```
-4.          0.    0.
-1.943D-16   1.    2.220D-16
0.           0.   16.
```

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Et $D = P^{-1}MP$ donc $PD = PP^{-1}MP = IMP = MP$. Puis

$$PDP^{-1} = MPP^{-1} = MI = M$$

$$M = PDP^{-1}$$

2.

—> D=[-4,0,0;0,1,0;0,0,16]
D =

```
-4.    0.    0.
0.     1.    0.
0.     0.   16.
```

—> help eye
—> I=eye(3,3)
I =

```
1.    0.    0.
0.    1.    0.
0.    0.    1.
```

—> (D+4*I)*(D-I)*(D-16*I)
ans =

```
0.    0.    0.
0.    0.    0.
0.    0.    0.
```

$$\boxed{(D + 4I)(D - I)(D - 16I) = 0_{\mathcal{M}_2}}$$

3. On a donc en développant l'égalité précédente

$$D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0$$

donc

$$(P^{-1}MP)^3 - 13(P^{-1}MP)^2 - 52(P^{-1}MP) + 64I = 0$$

donc

$$P^{-1}M^3P - 13P^{-1}M^2P - 52P^{-1}MP + 64P^{-1}IP = 0$$

et en simplifiant

$$M^3 - 13M^2 - 52M + 64I = 0$$

ce qui démontre que

$$\boxed{M^3 = 13M^2 + 52M - 64I}$$