Devoir Maison n° 5

À rendre le 14/11/23

Exercice n°1

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.
On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au n-ième lancer ».
- P_n : « Obtenir Pile au n-ième lancer ».

La suite $(P_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier n supérieur ou égal 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ».
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = \mathrm{P}(U_n) \qquad \text{et} \qquad a_n = \mathrm{P}(X = n)$$

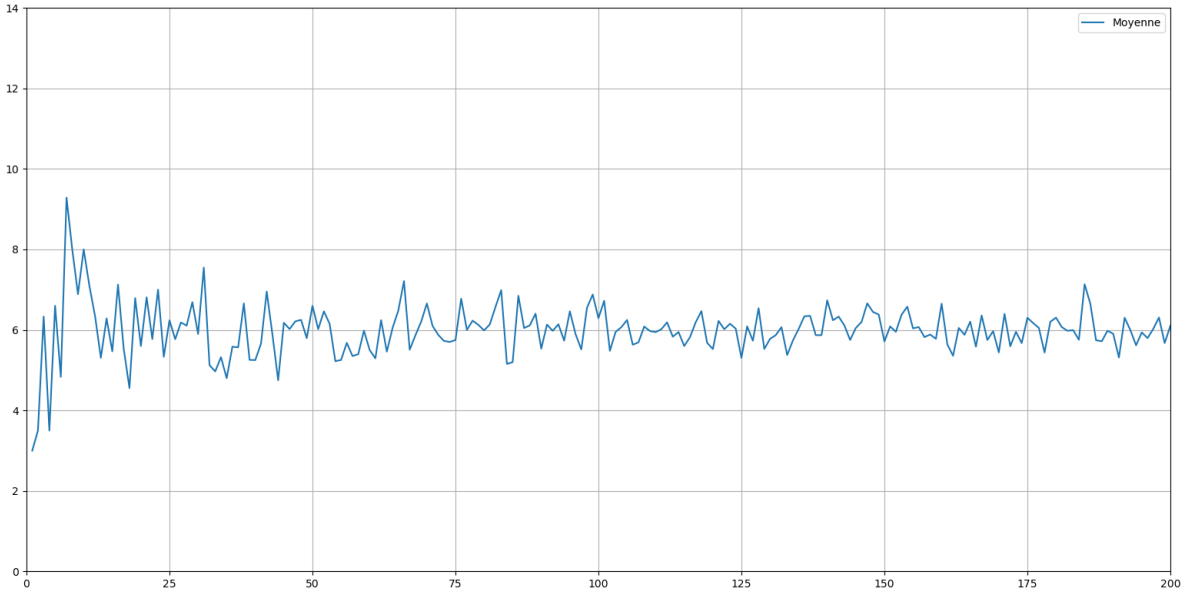
Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k.
   En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.
2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$.
3. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile ...
        if rand() < 1/2:
            ...
        else:
            pile = ...
        tirs = ...
    return(tirs)
```

   (b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def moyenne(n)` qui simule `n` fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

(c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier `n` de $[\![1, 200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie B

1. (a) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathrm{P}(U_{n+1}) \;=\; \mathrm{P}(U_n) + \mathrm{P}(B_{n+1}) - \mathrm{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

   (b) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} \;=\; (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

   (c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 : $u_{n+1} \;=\; u_n + \dfrac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$.

2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

3. En déduire :

$$\mathrm{P}(\,[X = -1]\,) \;=\; 1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) \;=\; 0$$

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$: $v_n \;=\; 1 - u_n$ et $S_n \;=\; \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\,\mathrm{P}([X = k]\,)$.

1. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 : $v_n - v_{n+1} \;=\; \dfrac{1}{8}\,v_{n-2}$.

2. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathrm{P}(\,[X = n+1]\,) \;=\; v_n - v_{n+1}$$

3. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n \;=\; 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n$$

4. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée.
5. Montrer que X admet une espérance.
6. (a) Démontrer que la suite $(n\,v_n)_{n\geq 2}$ converge vers un réel λ.
   (b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
   À l'aide de l'égalité démontrée à la question 1 de cette partie, obtenir une contradiction.
   (c) Donner alors la valeur de l'espérance de X.

Exercice n°2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \,\mathrm{d}t$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).
   On admet que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}t = 1$$
   où σ est un réel strictement positif.
   (a) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2} \,\mathrm{d}t$, puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2} \,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que, pour tout réel t, on a : $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 1-t^2$.
   (c) En déduire que : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$, puis donner la limite de la suite (u_n).
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t$, puis montre que $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. Que peut-on déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?
5. (a) Établir, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$.
   (b) En déduire l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
   (c) On admet l'équivalent $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$. En écrivant $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer que :
   $$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$
6. On admet que, si `V` est un vecteur, la commande `np.prod(V)` renvoie le produit des éléménts de `V`. Compléter le script `Python` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np

n=int(input('entrez une valeur pour n : '))
x=np.arange(1,n+1,1)
m=2*n+1
y=np.arange(1,m+1,1)
v=...
w=...
u=...*v**2/w
print(u)
```