Comparaisons séries/intégrales

Si le terme général d'une série est donnée par une formule du type $u_n = f(n)$, où f est une fonction monotone (souvent décroissante) sur $\mathbb{R}_+$, il est possible d'obtenir, par positivité de l'intégrale, des inégalités ou encadrements du type

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq u_n \quad \text{ou} \quad u_n \leq \int_{n-1}^n f(t)dt$$

Exemple :

On comprend mieux cela sur un schéma. Considérons une fonction f définie, continue, positive et décroissante sur un certain intervalle.

Plus précisément, une comparaison série / intégrale est utile pour :

- étudier la nature de la série $\sum_{n \geq a} f(n)$ en se ramenant à la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$,
- déterminer un équivalent de la somme partielle d'une série divergente ou du reste d'une série convergente (avec utilisation du théorème d'encadrement).

. Quelques exemples

Exercice 1 — Très classiques !

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Exercice 2 — Équivalent du reste d'une série de Riemann convergente

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série

$\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^2}$ est également convergente. On note ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

On cherche à obtenir un équivalent de R_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall N \in \llbracket n+1; +\infty \llbracket, \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}$$

puis :

$$R_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq R_n$$

3. En déduire que : $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Remarque :

Cette méthode permet également à étudier la nature des séries de Riemann. Bon exercice.

Exercice 3 — Équivalent de La somme partielle d'une série de Bertrand divergente

Soit la série $\sum_{k > 2} \frac{1}{k \ln(k)}$. On note, pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$: $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

On souhaite ici montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$ est divergente et obtenir un équivalent de S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Montrer que

$$\forall k \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

2. En déduire que

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq S_n \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

puis :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(3)) \leq S_n \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

3. En déduire que : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.