Chapitre

Suites implicites

Une suite implicite est définie par une équation. Pour tout entier n, on a une équation qui dépend de n :

$$(E_n) \quad \text{résoudre} \quad f_n(x) = 0 \text{ sur l'intervalle } I_n$$

Dans l'équation (E_n), la fonction f_n ou l'ensemble I_n (ou les deux) dépendent de n. La **suite implicite** $(x_n)_{n\geq 0}$ est alors définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n est la solution de (E_n) sur I_n.

Remarque :

- On ne peut pas déduire le comportement de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à partir de la fonction f_n. Ce n'est pas parce que f_n est croissante que $(x_n)_{n\geq 0}$ le sera.
- Dans le cas général, on n'a pas d'expression explicite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, d'où le nom de suite implicite.
- Il n'y a pas de résultat particulier à connaître pour l'étude de ce type de suite, seuls des exemples peuvent fournir des méthodes.

Dans tout ce qui suit nous allons prendre l'exemple suivant :

On considère l'équation $(E_n) : nx + \ln(x) = 0$, pour tout $n \geq 0$, d'inconnue $x > 0$.

. 1 Existence de la suite

La première question qu'on se pose dans ce type de problème consiste à montrer que la suite est bien définie, c'est à dire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur I_n.

Méthode :

On utilise le théorème de la bijection dans le cas d'une fonction strictement monotone. On peut déterminer le tableau de variation de la fonction f_n et on montre qu'elle s'annule une seule fois sur l'intervalle I_n.

Retour sur l'exemple. On pose pour tout $n \geq 0$ la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = nx + \ln(x)$$

Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera x_n cette solution.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On vérifie rapidement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
- f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = n + \frac{1}{x}$$

Comme $x > 0$, et $n \geq 0$, on a clairement $f_n'(x) > 0$, d'où le tableau de variations :

- D'après le théorème de la bijection, comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ de l'équation $f_n(x_n) = 0$.

. 2 Encadrement des termes

Méthode :

On se sert des variations de la fonction f_n.

Retour sur l'exemple. Montrons que pour tout n $0 < x_n \leq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord $x_n > 0$ par définition de l'équation. Pour montrer que $x_n \leq 1$, comme la fonction f_n est strictement croissante, il suffit de montrer que $f_n(x_n) \leq f_n(1)$. Or par définition de x_n on sait que $f_n(x_n) = 0$ et d'autre part $f_n(1) = n + \ln(1) = n \geq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in]0; 1]$.

. 3 Monotonie de la suite

Comme d'habitude, il s'agit de comparer x_{n+1} et x_n.

Méthode :

On se sert une nouvelle fois de la stricte monotonie de la fonction f_n. Comparer x_{n+1} et x_n revient à comparer $f_n(x_{n+1})$ et $f_n(x_n)$. Or on sait par définition $f_n(x_n) = 0$. Il suffit alors de déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.
Pour déterminer ce signe, il faudra se servir du fait que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

Retour à l'exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme f_n est strictement croissante,

$$x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow f_n(x_{n+1}) \geq f_n(x_n)$$

On calcule donc $f_n(x_{n+1})$.

$$f_n(x_{n+1}) = nx_{n+1} + \ln(x_{n+1})$$

Comme $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, on sait que

$$(n+1)x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \ln(x_{n+1}) = -(n+1)x_{n+1}$$

En remplaçant dans l'expression précédente, on trouve :

$$f_n(x_{n+1}) = nx_{n+1} - (n+1)x_{n+1} = -x_{n+1} \leq 0$$

Ainsi $f_n(x_{n+1}) \leq 0 = f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} \leq x_n$ car f_n est croissante.

Donc $(x_n)_n \geq 0$ est décroissante.

. 4 Convergence de la suite

Méthode :

Etant donné qu'on a déterminé le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, et qu'on a établi qu'elle est bornée, il suffit d'appliquer le théorème de la limite monotone.

Retour sur l'exemple. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel $\ell \in [0;1]$.

. 5 Valeur de la limite

Méthode :

Une façon de déterminer la limite est de passer à la limite dans l'équation (E_n), on détermine alors une équation vérifiée par la limite ℓ qu'il suffit de résoudre.
Attention à ce passage, la limite de certains termes n'est pas claire.

Retour sur l'exemple. On sait par définition de $(x_n)_{n\geq 0}$ que $nx_n + \ln(x_n) = 0$. Les limites des termes $\ln(x_n)$ et nx_n ne sont pas évidentes si $\ell = 0$. On va ici raisonner par l'absurde en supposant que la limite ℓ est strictement positive.

Dans ce cas, comme la fonction ln est continue en $\ell > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n) = \ln(\ell)$ et en passant à la limite dans l'égalité $nx_n + \ln(x_n) = 0$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} nx_n = -\lim_{n\to+\infty} \ln(x_n) = -\ln(\ell)$$

ce qui est absurde car $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = +\infty$.

Conclusion : $\ell = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.