Correction du DM n° 5

Le 14/11/23

Partie A

1.
$$[X = 2] = P_1 \cap P_2$$

   donc par indépendence
$$\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(P_1)\,\mathrm{P}(P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

   D'autre part
$$[X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3 \qquad [X = 4] = F_2 \cap P_3 \cap P_4$$

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = a_4 = \frac{1}{8}.}$$

2. On a
$$U_n = [X \leqslant n] = \bigcup_{k=2}^{n} [X = k]$$

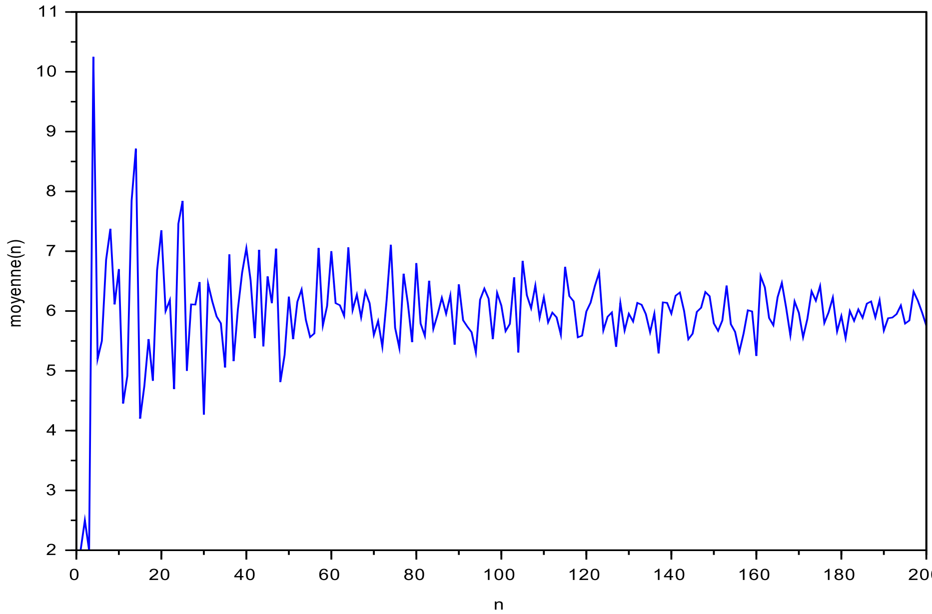
   Comme l'union est disjointe

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 2 : } u_n = \textstyle\sum_{k=2}^{n} a_k..}$$

3. (a)
```
def simulX():
        tirs = 0
        pile = 0
        while pile <2
                if rand() < 1/2:
                        pile = pile + 1
                else:
                        pile =0
                tirs = tirs+1
        return(tirs)
```

   (b)
```
def moyenne(n)
        s=0
        for i in range(1,n+1):
                s=s+simulX()
        end
        return(s/n)
```

   (c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier `n` de $[\![1, 200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Quand n devient grand on obtient une estimation de l'espérance de X

$$\boxed{X \text{ a une espérance proche de } 6.}$$

Partie B

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$$

Comme les deux événements ne sont pas incompatibles, il faut utiliser la formule du crible

$$\mathrm{P}(U_{n+1}) = \mathrm{P}(U_n) + \mathrm{P}(B_{n+1}) - \mathrm{P}(U_n \cap B_{n+1}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(U_{n+1}) \ = \ \mathrm{P}(U_n) + \mathrm{P}(B_{n+1}) - \mathrm{P}(U_n \cap B_{n+1}).}$$

(b) On a $\Omega = P_{n-1} \cup F_{n-1}$
donc

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}) \cup (U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1})$$

Or

$$U_n \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1}$$

car il le double pile arrive avant ou au moment du tit n et que le tir $n-1$ est un Face alors le double pile arrive avant ou moment du tir $n-2$.
Donc

$$U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$$

De plus comme $P_{n-1} \cap P_n \subset U_n$

$$U_n \cap P_{n-1} \cap P_n$$

et donc

$$U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1} = U_n \cap P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} = \cap P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$$

$$\boxed{U_n \cap B_{n+1} \ = \ (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).}$$

(c) Soit n supérieur ou égal à 4. $(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ et $(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$ sont incompatibles à causes des événements F_{n-1} et P_{n-1}.
On constate que U_{n-2} qui dépend des résultats des tires 1 à n-2 est indépendant de des résultats des tirs $n-1$, n

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U_n \cap B_{n+1}) &= \mathrm{P}\left((U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})\right) && \text{question précédente} \\
&= \mathrm{P}\left(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\right) + \mathrm{P}\left(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\right) && \text{incompatibilité} \\
&= \mathrm{P}\left(U_{n-2}\right) \mathrm{P}\left(F_{n-1}\right) \mathrm{P}\left(P_n\right) \mathrm{P}\left(P_{n+1}\right) + \mathrm{P}\left(P_{n-1}\right) \mathrm{P}\left(P_n\right) \mathrm{P}\left(P_{n+1}\right) && \text{indépendance} \\
&= u_{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

En utilisant 1.a, et comme $\mathrm{P}(B_{n+1}) = \mathrm{P}(P_{n-1})\,\mathrm{P}(P_n) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4} - u_{n-2}\frac{1}{8} - \frac{1}{8}$$

donc

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} - u_{n-2}\frac{1}{8}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 4 : } u_{n+1} \ = \ u_n + \frac{1}{8}\left(1 - u_{n-2}\right)}$$

2. Soit $n \geqslant 4$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_n)$$

Or comme u_{n-2}est une probabilité, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \geq 4} \text{ est croissante.}}$$

Comme de plus elle majorée par 1, d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite ℓ.

Attention : Ce théorème ne permet pas de calculer la limite.

On sait que

$$\forall n \in\in [\![4; +\infty[\![\qquad u_{n+1} \ = \ u_n + \frac{1}{8}\left(1 - u_{n-2}\right)$$

en passant à la limite

$$\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$$

$$\boxed{\ell = 1}$$

3. Les valeurs prises par X étant dans $\mathbb{N} \cup \{-1\}$ la première égalité est juste. Pour $n \in \mathbb{N}$ $U_n = [X \leqslant n]$ étant une suite d'événements croissante car

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \qquad [X \leqslant n] \subset [X \leqslant n+1]$$

Ou de façon plus intuitive si le premier « Pile Pile » arrive avant ou au tirage n, alors a fortiori cette séquence arrive avant le rang $n+1$.
Le théorème de la limite monotone chapitre probabilités de ECE1 affirme alors que

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(U_n)$$

et cette limite vaut 1 d'après la question précédente

$$\boxed{\mathrm{P}(\,[X=-1]\,) \;=\; 1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) \;=\; 0}$$

On vient de montrer qu'il est presque certain d'obtenir deux « Pile » successifs.

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n \;=\; 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad S_n \;=\; \sum_{k=2}^{n} k\ \mathrm{P}([X=k]\,)$$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= 1 - u_n - 1 + u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - u_n \\ &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) - u_n && \text{résultat B.1.c} \\ &= \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \\ &= \frac{1}{8} v_{n-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 4 : } v_n - v_{n+1} \;=\; \frac{1}{8}\, v_{n-2}}$$

2. *la formule* $\mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$ *est valable si* $A \subset B$.

   Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$[X = n+1] \cup [X \leqslant n] = [X \leqslant n+1]$$

   et l'union est disjointe donc

$$\mathrm{P}(\,[X = n+1]\,) + u_n = u_{n+1}$$

   puis

$$\mathrm{P}(\,[X = n+1]\,) = u_{n+1} - u_n = 1 - v_{n+1} - (1 - v_n)$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 2 : } \mathrm{P}(\,[X = n+1]\,) \;=\; v_n - v_{n+1}}$$

3. **Initialisation :** Soit $n = 2$

$$S_2 = 2P(X=2) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

et

$$v_2 = 1 - u_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} v_4 &= 1 - u_4 = 1 - (a_2 + a_3 + a_4) \\ &= 1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) && \text{question A.1.a} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$6 - 8\,v_{2+2} - 2\,v_2 = 6 - 4 - 2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S_n \;=\; 6 - 8\,v_4 - n\,v_2$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que

$$S_n \;=\; 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n$$

La question C.3 donne

$$8v_{n+2} - v_n = 8v_{n+3}$$

Alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathrm{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} k\,\mathrm{P}(X=k) + (n+1)P(X=n+1) \\ &= S_n + (n+1)P(X=n+1) \\ &= S_n + (n+1)(v_n - v_{n+1}) && \text{question précédente} \\ &= 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n + (n+1)(v_n - v_{n+1}) && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= 6 - 8\,v_{n+2} - \;v_n - (n+1)v_{n+1} \\ &= 6 - 8\,v_{n+3} - (n+1)v_{n+1} && \text{remarque préléminaire} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 2 : } S_n \;=\; 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n}$$

4. On a montreé que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \qquad S_{n+1} = S_n + (n+1)P(X = n+1)$$

comme une probablité est positive, cela démontre que la suite (S_n) est croissante.
De plus la question précédente et le fait que (v_n) en tant que suite de probabilités est à termes positifs permet de démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \qquad S_n \leqslant 6$$

$$\boxed{\text{La suite } (S_n)_{n\geqslant 2}\text{, est croissante et majorée.}}$$

5. En utilisant le théorème de la limite monotone on en déduit que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est convergent, cela signifie que la série $\sum_{k\geqslant 2} kP(X=k)$ converge et comme X est à valeurs positives, la convergence absolue se confond avec la convergence

$$\boxed{X \text{ admet une espérance}}$$

6. (a) D'après la question 3, pour tout entier n plus grand que 2

$$nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n$$

Or on sait que les suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ et $(S_n)_{n\geqslant 2}$ convergent, donc

$$\boxed{\text{La suite } (n\, v_n)_{n\geq 2} \text{ converge vers un réel } \lambda}$$

(b) Si λ est non nul, alors

$$nv_n \sim_{+\infty} \lambda$$

donc

$$v_n \sim_{+\infty} \frac{\lambda}{n}$$

Or $\sum \frac{\lambda}{n}$ est une série de Riemann divergente, en, utilisant le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs

$$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 0 \text{ la série } \sum_{n\geqslant 2} v_n \text{ diverge.}}$$

Soit $N \geqslant 4$

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{N} v_k &= 8\sum_{k=4}^{N}(v_{n+2} - v_n) && \text{question C.1}\\ &= 8\left(v_{N+2} + V_{N+1} - V_5 - V_4\right) && \text{télescopage}\end{aligned}$$

Comme (v_n) converge cela démontre que la série $\sum v_n$ converge. Il y a donc contradiction

$$\boxed{\lambda = 0}$$

(c) En utilisant C.3 et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} nv_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 6$$

$$\boxed{X \text{ admet une espérance égale à 6.}}$$

Exercice n°2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \,\mathrm{d}t$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1.

$$\begin{aligned}
u_0 &= \int_0^1 (1-t^2)^0 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \int_0^1 (1-t^2)^1 \,\mathrm{d}t \\
&= \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \int_0^1 (1-t^2)^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1-2t^2+t^4) \,\mathrm{d}t \\
&= \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{3} \text{ et } u_2 = \frac{8}{15}.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;\, 1]$, on a

$$0 \leqslant t^2 \leqslant 1$$

donc

$$0 \leqslant 1 - t^2 \leqslant 1$$

donc

$$0 \leqslant \left(1-t^2\right)^{n+1} \leqslant \left(1-t^2\right)^n \leqslant 1$$

Comme $0 \leqslant 1$ et par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

(b) On a aussi démontré dans la question précédente que que la suite était positive, minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

3. (a) Il suffit de choisir $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ alors l'indication donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{1}} \,\mathrm{d}t = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

Comme la fonction $t \mapsto \exp(-nt^2)$ est paire [(1)]

$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2} \,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

(b) L'inégalité de convexité classique

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$$

On posant $x = -t^2$ pour $t \in \mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 1 - t^2 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t\text{, on a : } \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 1 - t^2.}$$

(c) On a donc pour $t \in [0;\, 1]$

$$0 \leqslant 1 - t^2 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

donc

$$0 \leqslant \left((1 - t^2\right)^n \leqslant \left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^n$$

$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left((1 - t^2\right)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^n \,\mathrm{d}t$$

donc

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)^n \,\mathrm{d}t$$

La dernière inégalité découlant de la positivité de l'intégrande.
Et donc

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

(1). limite des résultats du programme, on peut montrer avec le changement de variable $u = -t$ que si ff est paire et que les intégrales convergent $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

En utilisant le théorème des encadrements :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Or pout $t \in [0;\, 1]$

$$0 \leqslant t^2 \leqslant t \leqslant 1$$

Donc

$$0 \leqslant 1-t \leqslant 1-t^2 \leqslant 1$$

Puis

$$0 \leqslant (1-t)^n \leqslant \left(1-t^2\right)^n \leqslant 1$$

Donc

$$\int_0^1 (1-t)^n \;\mathrm{d}t \leqslant u_n$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N},\, u_n \geqslant \frac{1}{n+1}.}$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant u_n$$

Or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc en utilisant le critère de convergence des séries à termes positifs

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} 1 \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On pose pour $t \in [0;\, 1]$

$$f(t) = t \qquad\qquad f'(t) = 1$$
$$g(t) = (1-t^2)^{n+1} \qquad\qquad g'(t) = -2(n+1)t(1-t^2)^n$$

Comme ces fonctions sont classe de $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\, 1]$.

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \left[t(1-t^2)^{n+1}\right]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \\ &= 0 - 0 + 2(n+1)\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \\ &= (2n+2)\left[\int_0^1 (t^2-1)(1-t^2)^n \,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t\right] \\ &= (2n+2)\left[-\int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t\right] \\ &= (2n+2)(u_n - u_{n+1})\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{, on a : } u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})}$$

(b) On a pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1}$$

et donc

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}u_n$$

Démontrons l'égalité par récurrence

- **Initialisation** $u_0 = 1$ et
$$\frac{4^0(0!)^2}{(2\times 0+1)!} = 1$$
- **Hérédité** Soit nßℕ supposons que
$$u_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$
alors
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3}u_n \\
&= \frac{2n+2}{2n+3}\cdot\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= (2n+2)\cdot\frac{4^n(n!)^2}{(2n+3)(2n+1)!} \\
&= (2n+2)(2n+2)\cdot\frac{4^n(n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\
&= (2n+2)^2\cdot\frac{4^n(n!)^2}{(2n+3)!} \\
&= 4(n+1)^2\cdot\frac{4^n(n!)^2}{(2n+3)!} \\
&= \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}
\end{aligned}$$
- **Conclusion** Par écurrence

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}\ u_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

(c) L'indication donne

$$(2n)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\ (2n)^2 n\mathrm{e}^{-2n}$$

et

$$2n+1 \sim 2n$$

Donc

$$(2n)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\ 4^n n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}$$

et

$$(n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi n}\right)^2\ n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}$$

Donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n 2\pi n\ n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{2n\sqrt{4\pi n}\ 4^n(n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}$$

donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{4\pi n}}$$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

6. Informatique.
On admet que, si `t` est un vecteur, la commande `np.prod(t)` renvoie le produit des éléménts de `t`. Compléter le script `Python` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np

n=int(input('entrez une valeur pour n : '))
x=np.arange(1,n+1,1)
m=2*n+1
y=np.arange(1,m+1,1)
v=np.prod(x)
w=np.prod(y)
u=4**n*(v**2)/w
print(u)
```