Devoir Maison n° 6

À rendre le 28/11/23

Exercice n°1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$, on pose $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$, la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On la note x_n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$, $f_n\left(\frac{2}{n}\right) < f_n(x_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ puis que $\frac{1}{n} < x_n < \frac{2}{n}$.
   Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$?
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ (on utilisera le fait que pour tout $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$).
5. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $n \geqslant 3$ et $x \in [0, 1]$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$.

Exercice n°2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $\frac{x^3}{x^2 + n} = n$ et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^3}{x^2 + n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n < x_n < n + 1$.
   Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.