Correction du DM n° 6

Le 28/11/23

Exercice n°1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. La fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$$
Pour $x \in [0, 1]$, $x^{n-1} < 1$ donc $f_n'(x) < 0$ et $\boxed{f_n \text{ est décroissante sur } [0, 1].}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. La fonction f_n est continue et strictement monotone. D'après le théorème de la bijection, f_n est bijective de $[0, 1]$ dans $f_n([0, 1])$. Or $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - n$. Comme $n \geq 3$ par hypothèse, on a bien $0 \in f([0, 1])$.
$\boxed{\text{Donc il existe un unique } x_n \in [0, 1] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n + 1 - n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 < 0$$
$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n + 1 - n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n > 0$$
Comme, par définition, $f_n(x_n) = 0$, on a bien $\boxed{f_n\left(\frac{2}{n}\right) < f_n(x_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right).}$
De plus, comme la fonction f_n est strictement décroissante, cela implique $\boxed{\frac{1}{n} < x_n < \frac{2}{n}}$.
Le théorème des gendarmes nous assure alors que $\boxed{(x_n)_{n\geq 3} \text{ converge vers } 0.}$
4. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$, c'est à dire $x_n^n + 1 - nx_n = 0$, ou encore $nx_n = x_n^n + 1$. Or d'après la question 3, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{2}{n}$ et en particulier $0 < x_n < \left(\frac{2}{3}\right)$, ce qui implique $0 < x_n^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Par encadrement, on montre ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$, et donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nx_n = 1}$$
5. soit $x \in [0, 1]$.
$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 1 - (n + 1)x - x^n - 1 + nx = x^n(x - 1) - x$$
Or $x \in [0, 1]$, donc $x^n(x - 1) - x < 0$, et donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$. En remplaçant x par x_n, on trouve
$$f_{n+1}(x_n) < f_n(x_n) \Leftrightarrow f_{n+1}(x_n) < 0$$
Or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, donc $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. Par décroissance de f_{n+1} on obtient que $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est décroissante.}}$

Exercice n°2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme fraction rationnelle de dénominateur jamais nul. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f_n'(x) = \frac{3x^2(x^2 + n) - x^3 \times 2x}{(x^2 + n)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 n}{(x^2 + n)^2} \geq 0$$

La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} x \qquad f_n(x) \underset{-\infty}{\sim} x$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, $n \in f_n(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = n \text{ admet une unique solution}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n(n) = \frac{n^3}{n^2 + n} = \frac{n^2}{n+1}$$

$$f_n(n) - n = \frac{n^2 - n(n+1)}{n+1} = \frac{-n}{n+1} < 0$$

Or comme $n \geq 1$,

$$f_n(n+1) = \frac{(n+1)^3}{(n+1)^2 + n + 1} = \frac{(n+1)^2}{n+2}$$

$$f_n(n+1) - n = \frac{(n+1)^2 - n - 2}{n+2} = \frac{n-1}{n+2} > 0$$

Ainsi

$$f_n(n) < f_n(x_n) < f_n(n+1)$$

et par stricte croissance de f_n on obtient $\boxed{n < x_n < n+1.}$

Par comparaison, on montre que $\boxed{(x_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

3. On a simplement, pour $n \in \mathbb{N}$, $n < x_n < n+1 < x_{n+1} < n+2$, donc $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est croissante.}}$

Autre méthode :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, ce qui veut dire, en remplaçant x par x_n, que $f_{n+1}(x_n) \leq f_n(x_n)$, ou encore $f_{n+1}(x_n) \leq n$. Comme $f_{n+1}(x_{n+1}) = n+1$, on a $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$, et par croissance de f_{n+1}, on montre que $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est croissante.}}$