HEC III 2005 voie E

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2 .
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\ \mathrm{Id}$.

A. Étude du cas $n = 2$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = (\sqrt{2} - 2; \sqrt{2})$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.
2. On note $F = \mathrm{Ker}(f - 2Id)$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2Id)$.
   (a) Montrer que G est engendré par le vecteur u. En déduire la dimension de F et donner une base de F.
   (b) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2: *Montrer que* $G = Ker(f + 2I_d)$.
3. Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.*Déterminer deux réels distincts tels que* $f - \lambda Id$ *ne soit pas bijective. Déterminer, pour chacune de ces valeurs, une base de* $Ker(f - \lambda Id)$*. Ces éléments de la base sont les vecteurs propres en question.*

B. Étude du cas général.

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 , et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

1. (a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.
2. Déterminer les valeurs propres possibles de f.
3. Vérifier que $2Id$ et $-2Id$ satisfont l'équation $(*)$.
   On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\ \mathrm{Id}$ et $f \neq -2\ \mathrm{Id}$, et on note $F = \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2Id)$.
2. Soit x un élément de E. Montrer que $(f(x) - 2x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f + 2Id)$ et que $(f(x) + 2x)$ appartient à F. En déduire que $G \subseteq \mathrm{Ker}(f + 2Id)$ et que $\mathrm{Im}(f + 2Id) \subseteq F$. Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.
3. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(f + 2Id)$.
   (a) Exprimer $(f - 2Id)(x)$ en fonction de x uniquement. En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}(f + 2Id)$
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

PROBLÈME.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n, dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.
On dira qu'on a obtenu une paire lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Partie I . Tirages avec remise.

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.
   (a) Préciser un espace probabilisé $(\Omega; A; P)$ qui modélise cette expérience.
   (b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués. Déterminer la loi de Y, puis donner son espérance et sa variance.
2. Écrire en Python une fonction dont l'en-tête est `def pgrml(n):` qui modélise l'expérience précédente.
3. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1 . On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.
   (a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(U = k)$. En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1 . Reconnaître la loi de U.
   (b) Déterminer la loi conjointe du couple $(U; Z)$.
   (c) Montrer que, pour tout k de N^*, $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{l=k}^{+\infty} \binom{l}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^l$.
   (d) Calculer $P(Z = 1)$. Montrer que $P(Z = 0) = 1/3$.
   (e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question (c)) pour $k = i + 1$, justifier, pour tout i de N^* l'égalité : $P(Z = i + 1) = \dfrac{1}{4}P(Z = i + 1) + P(Z = i)$.
   (f) En déduire la loi de Z.

Partie II . Tirages sans remise.

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides.
On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$. Combien y a-t-il de résultats possibles?
3. Quelles sont les valeurs prises par X_2 ? On précisera pour chaque valeur prise par X_2, l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir. En déduire la loi de X_2.

B. Étude du cas général.

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

1. (a) Décrire un univers Ω des événements observables.
   (b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.
   (c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.
   Pour tout entier naturel k, on note $a(n; k)$ le cardinal de $\{\omega \mid \omega \in \Omega \text{ et } X_n(\omega) = k\}$. Par convention, $a(0; 0) = 1$.
2. (a) Préciser la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a(n; j)$.
   (b) Déterminer $a(n; n)$ et $a(n; n - 1)$.
3. (a) Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$, l'égalité suivante : $\dfrac{a(n; j)}{n!} = \binom{n}{j} \dfrac{a(n - j; 0)}{(n - j)!}$. En déduire la relation $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j; 0)}{j!} = n!$.
   Donner l'expression de $a(n; 0)$ en fonction des nombres $(a(j; 0))_{0 \leq j \leq n-1}$.

(b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.

Justifier l'égalité : $\left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} k-i \\ j-i \end{array}\right)$ puis montrer que $\sum_{j=i}^{k}(-1)^j\left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right)=0$.

En déduire la valeur de la somme $\sum_{j=i}^{k-1}(-1)^j\left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right)$.

4. (a) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités

$$a(j;0)=j!\sum_{i=0}^{j}\left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array}\right)(-1)^{j-i}i!$$

Montrer l'égalité : $a(k;0)=k!\sum_{i=0}^{j}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)(-1)^{k-i}i\,!$.

(On pourra utiliser l'expression, pour $n=k$, de $a(n;0)$ trouvée dans la question (3.a)) .

(b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k, la valeur de $a(k;0)$.

(c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

Partie III . Tirages mixtes .

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans l'urne blanche et avec remise dans l'urne noire, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

1. (a) Montrer que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de X_n.
constante fixée.

On désire modéliser cette expérience. On suppose que n est une

2. Définir en Python deux matrices, notée `blanc` et `noir` contenant n entiers de 1 à n.

3. (a) Soit s un tableau de type tab .Écrire une fonction Pyhton dont l'entête est `Echange(s,i,j)` qui échange les éléments $s[i]$ et $s[j]$ du tableau s.

(b) On considère les lignes de programme suivantes utilisant la fonction `Echange` .

```
for i in range(n-1):
        j=np.rand(0,n-i)+i
        Echange(blanc,i,j)
```

Expliquer le fonctionnement de ce programme et son résultat.

(c) Construire un programme qui s'appellera `Initialise` permettant de simuler le tirage sans remise et au hasard des n boules numérotées, en mettant dans la variable s [i] le numéro de la $i^{\text{-ème}}$ boule tirée (On pourra s'inspirer de la question précédente).

4. Écrire un programme complet permettant de simuler l'expérience de cette partie III lorsque $n=20$, puis de donner la valeur de X_n.

(Il n'est pas nécessaire ici de recopier les procédures Echange et Initialise).