Correction du Devoir Surveillé n° 2
02/12/22

Exercice 1 :

Pour tout entier n entier naturel, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in \left[0,+\infty\right[, f_n(x) = \mathrm{e}^x + nx^2 - 3$$

1. (a) Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition. Dresser son tableau de variations.
   (b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1 .
   (c) Ecrire un programme Python permettant de tracer la représentation graphique de la fonction f_n. On y trouvera notamment un fonction d'en-tête `def f(n,x)` pour définir la fonction.
   (d) Tracer dans un même repère les courbes de f_0, f_1 et f_2.
   (e) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.
   (f) Préciser la valeur de u_0.
   Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.
   (g) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0,1[$.
2. Écrire une fonction Python `dicho(n)` qui prend un entier n et qui calcule une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près par la méthode de dichotomie.
3. Montrer que : $\forall x \in]0,1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
4. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).
5. Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
6. On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
   Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + nu_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.
7. Donner enfin la valeur de ℓ.
8. Montrer que $\sqrt{\frac{n}{2}}u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

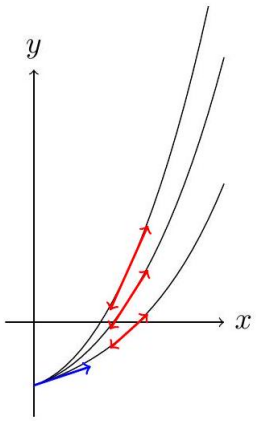
1. (a) La fonction f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \geqslant 0, f_n'(x) = \mathrm{e}^x + 2nx > 0$ On peut construire le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$+$		
Variation de f	2	↗	$+\infty$

   (b) La tangente de f_n en 1 a pour équation $y = f_n(1) + f_n'(1)(x-1)$.
   Or : $f_n(1) = \mathrm{e}^1 + n - 3$ et $f_n'(1) = \mathrm{e}^1 + 2n$. Ainsi :
   $= f_n(1) + f_n'(1)(x-1) = \mathrm{e}^1 + n - 3 + \left(\mathrm{e}^1 + 2n\right)(x-1) = \boxed{-n - 3 + \left(\mathrm{e}^1 + 2n\right)x}$

   (c)
```
def fn(n,x):
    return(np.exp(x)+n*x**2-3)
```

   (d) Il était important ici de tracer les tangentes en 1 de f_0, f_1, f_2.
   Afin d'avoir une idée plus précise du tracé, déterminons l'équation de la tangente de f_n en 0 . On a : $f_n(0) = -2$ et $f_n'(0) = 1$.
   Ainsi, l'équation de la tangente de f_n en 0 est $y = -2 + x$.



(e) La fonction f_n est :
× continue sur $[0,+\infty[$,
× strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
Elle réalise donc, d'après le théorème de la bijection, une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f_n([0,+\infty[) = [-2,+\infty[$.
Ainsi, $0 \in [-2,+\infty[$ admet un unique antécédent $u_n \in [0,+\infty[$ par la fonction f_n.
La tangente de f_n en 1 a pour équation $y = -(n+3) + \left(\mathrm{e}^1 + 2n\right) x$.

(f)

$$\text{La fonction } f_0 : x \mapsto \mathrm{e}^x - 3 \text{ s'annule en } u_0 = \ln 3$$

(g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $f_n(u_n) = 0$ par définition,
- $f_n(0) = -2 < 0$,
- $f_n(1) = \mathrm{e}^1 + n - 3 > 0$ car $n \geqslant 1$ et $\mathrm{e}^1 > 2,71$.

Ainsi : $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(1)$. On applique alors la fonction f_n^{-1}, strictement croissante (car de même monotonie que f_n d'après le théorème de la bijection) à chaque membre de cette inégalité.

$$\text{On en déduit que : } 0 < u_n < 1.$$

2.

```
def dicho(n):
        a=0
        b=1
        c=(a+b)/2
        while np.abs(fn(n,a)-fn(n,b))>0.001:
                if fn(n,a)*fn(n,c)<0:
                        b=c
                elif fn(n,a)*fn(n,c)>0:
                        a=c
                else:
                        return(c)
                c=(a+b)/2
        return(c)
```

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(e^{\mathtt{X}} + (n+1)x^2 - \mathbb{X}\right) - \left(^{\mathtt{X}} + nx^2 - \mathbb{X}\right) = x^2 > 0$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in]0,1[, \text{ on a } : f_{n+1}(x) > f_n(x).$$

4. Comme $u_{n+1} \in]0,1[$, on peut appliquer le résultat de la question précédente.
On obtient : $f_n(u_{n+1}) < f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.

$$\text{Ainsi, } f_n(u_{n+1}) < 0$$

On peut écrire cette inégalité sous la forme : $f_n(u_{n+1}) < 0 = f_n(u_n)$. En appliquant f_n^{-1}, strictement croissante, à chaque membre de l'inégalité, on obtient : $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 . D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite ℓ qui vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
6. Supposons que $\ell > 0$. Alors :
   - $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell}$
   - $nu_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   On en déduit que $f_n(u_n) = \mathrm{e}^{u_n} + nu_n^2 - 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Or, par définition de u_n, on a : $f_n(u_n) = 0$, ce qui contredit le calcul précédent.
7. D'après la question précédente, $\ell \leqslant 0$. Comme de plus $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, on a : $\ell = 0$ f)
8. On a : $f_n(u_n) = 0 = \mathrm{e}^{u_n} + nu_n^2 - 3$. Ainsi : $nu_n^2 = 3 - \mathrm{e}^{u_n}$.
   D'où : $\frac{n}{2}u_n^2 = \frac{3-\mathrm{e}^{u_n}}{2}$ et $\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{u_n^2} = \sqrt{\frac{3-\mathrm{e}^{u_n}}{2}}$.

   $$\text{Ainsi : } \sqrt{\frac{n}{2}}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{3-\mathrm{e}^0}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

   Ceci signifie que les suites (u_n) et $\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$ ont même comportement asymptotique.

   Autrement dit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Exercice 2 :

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer la matrice $A(A-2I)^2$.
   (b) (*)En déduire les seules valeurs propres possibles de f
   (c) Déterminer une base de $Ker(f)$ et de $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,|\, AX = 2X\}$.
   (d) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. On considère le vecteur $w = (-2, 0, 1)$
   (a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Exprimer $f(w)$ comme combinaison linéaire de v et w puis vérifier que la matrice de f dans la base (u, v, w) est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) (*) Montrer que f n'est pas diagonalisable.
3. (a) On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Déterminer N^2 puis utiliser la formule du binôme pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.
   (b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n
   (c) Proposer une matrice P telle que $A = PTP^{-1}$ puis déterminer P^{-1}.
   (d) Que faut-il taper dans Python pour obtenir la matrice P et son inverse ?
   (e) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$
   (f) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   (g) Ecrire un programme Python qui demande à l'utilisateur un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et qui affiche A^n.

1. (a) **Arttention** : on ne développe pas, on commence par calculer la différence !
   $$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix} \text{ et}$$
   $$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

enfin $A(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{A(A-2I)^2 = 0}$

(b) Donc **si** α est valeur propre de A **alors** $\alpha(\alpha-2)^2 = 0$ donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$.

Conclusion : Les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 2

N.B. cela est cohérent avec les valeurs propres de (sur la diagonale) de la matrice T (triangulaire) que l'on a ci-dessous.

(c) On considère les vecteurs $u = (2,1,-2)$ et $v = (3,1,-2)$.
Les coordonnées des images sont données par :

$M_{\mathcal{B}}(f(u)) = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(u) = 0$

$M_{\mathcal{B}}(f(v)) = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $f(v) = (6,2,-4) = 2v$

et comme $u \neq 0$ alors 0 est valeur propre de f et de même 2 est également valeur propre de f. Et comme il n'y en a pas d'autres possibles

Conclusion : Les valeurs propres de f sont 0 et 2.

(d) Comme 0 est valeur propre de f, f n'est pas bjective.

Conclusion : f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$

2. On considère le vecteur $w = (-2,0,1)$

(a) On montre que la famille $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est libre :
Soient $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Si $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ alors $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ et $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(u,v,w) est donc une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (dimension 3)

Conclusion : La famille $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On a $M_{\mathcal{B}}(f(w)) = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $f(w) = (-1,1,0)$

Méthode : pour exprimer $(-1,1,0)$ comme cmobinaison linéaire de v et de w, on peut chercher x et y réels tels que $(-1,1,0) = xv + yw$ (à traduire sur les composantes)
On peut aussi s'inspirer de la question suivante : si la matrice de f dans la base (u,v,w) est bien T alors les coordonénes de $f(w)$ sont $(0,1,2)$ et $f(w) = v + 2w$. Ce qu'il suffit de vérifier !
$v + 2w = (3,1,-2) + 2(-2,0,1) = (-1,1,0) = f(w)$

Conclusion : On a donc $f(w) = v + 2w$

On a les coordonnées de l'image de u par : $f(u) = 0 = 0u + 0v + 0w$ qui a donc pour coordonénes $(0,0,0)$.
Et de même $\text{coord}_{\mathcal{C}}(f(v)) = (0,2,0)$ et $\text{coord}_{\mathcal{C}}(f(w)) = (0,1,0)$

Conclusion : la matrice de f dans (u,v,w) est bien $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) Pour savoir si f est diagonalisable ou pas, on regarde si sa matrice associée T l'est ou non (plus facile à voire que sur A)

$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0$

donc le sous espace propre de T associé à la valeur propre 0 est $E_0 = \text{Vect}((1,0,0))$.
Ce vecteur étant non nul, il est libre et donc $\dim(E_0) = 1$

$(T - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff x = z = 0.$

Donc le sous espace propre de T associé à la valeur propre 2 est $E_2 = \text{Vect}((0,1,0))$.
Ce vecteur étant non nul, il est libre et donc $\dim(E_2) = 1$
La somme des dimension des sous espaces propres est $2 \neq 3$ l'ordre de T.
Donc T n'est pas diagonalisbale

Conclusion : f n'est pas diagonalisable.

3. (a) On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $N^2 = 0$ et donc $N^k = 0$ si $k \geq 2$

et comme $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = DN$ alors

$$\begin{aligned} (D+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} 0 \text{ valvble pour } n \geq 2 \text{ et pour } n = 1 \\ &= \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ non nul, on a } T^n = D^n + nD^{n-1}N}$

(b) On a $ND^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (qui n'est pas valable pour $n = 0$)

(c) Soit P la matrice de passage de la base canonique dans la base (u, v, w) alors $A = M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) M_{\mathcal{C}}(f) M_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ donc

Conclusion : $\boxed{A = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

On détermine P^{-1} par Gauss :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \\ L_3 + 2L_2 \to L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 - L_2 \to L_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ L_2 + 2L_3 \to L_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

(d)
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al


A=np.array([[6,10,11][2,6,5][-4,-8,2-8]]
return(al.inv(A))
```

(e) Par récurrence : $PT^0P = I = A^0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PT^nP^{-1}$ alors $A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^{n+1}P$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, on a : } A^n = PT^nP^{-1}}$

(f) On alors pour tout $n \geq 1$:

$$A^n = P2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2n+4 & n+4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

et $A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 6 & 6n+4 & 3n+8 \\ 2 & 2n+4 & n+4 \\ -4 & -4n-4 & -2n-6 \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$ et $A^0 = I$

(g) On tape

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

n=int(input('Donner un entier'))
A=np.array([[6,10,11][2,6,5][-4,-8,2-8]]
return(al.matrix_power(A,n))
```

Exercice 3 :

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivantes toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X;Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

1.a. Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$

1.b. Établir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

1.c. En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante

$$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ \frac{1+X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$$

2.a. Expliquer soigneusement ce que renvoie la fonction Python suivante.

```
import nympy.random as rd
def mystere(p):
        n=1
        while rd.random()<1-p:
                n=n+1
        return n
```

2.b. Écrire une fonction Python prenant en argument un réel p de $]0;1[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire T Ce programme pourra utiliser la fonction mystere précédente et on rappelle qu'en Python, l'exécution de **a**% b renvoie le reste de la division euclidienne de a par **b**.

2.c. Montrer que T prend des valeurs entières positives non nulles.

2.d. Réciproquement, justifier que tout entier naturel non nul k est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$

2.e. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction de certains évènements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

1. (a) cf. cours : Comme les valeurs possibles de X et de Y sont $\mathbb{N}^*$ alors $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, rang du premier succès dans une suite d'expériences indépendantes avec probabilité de succès p à chaque expérience, l'événement $(X > k)$ s'interprète "pas de succès jusqu'au $k^{ième}$" soit $(E_1 \cap \cdots \cap E_n)$ de probabilité (indépendantes) $\mathrm{P}(X > k) = q^k$ pour tout $k \geq 1$ et pour $k = 0$ également $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z > k) = q^k$.

   (b) Pour tout entier k : $(Z > k-1) = (Z \geq k)$ car Z ne prend que des valeurs entières,
   Donc $(Z > k-1) = (Z = k) \cup (Z > k)$ incompatibles d'où $\mathrm{P}(Z > k-1) = \mathrm{P}(Z = k) + \mathrm{P}(Z > k)$
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z > k-1) - \mathrm{P}(Z > k) = \mathrm{P}(Z = k)}$ (que Z soit ou non supérieur à 1)

   (c) Comme par indépendance $\mathrm{P}(Z > k) = \mathrm{P}(X > k)\,\mathrm{P}(Y > k)$ alors
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z > k) = q^{2k} \text{ pour tout } k \geq 0}$
   D'où $\mathrm{P}(Z = k) = q^{2(k-1)} - q^{2k}$ pour $k - 1 \geq 0$ et $k \geq 0$, donc pour $k \geq 1$ et $\mathrm{P}(Z = k) = q^{2(k-1)}\left(1 - q^2\right)$
   Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right)}$

2. (a) Le programme compte le rang d'apparition de la première occurrence d'un évènement de probabilité p, donc le programme mystère permet de simuler une la réalisation d'une loi géométrique de paramètre p.

   (b)
```
def T(p):
        x=mystere(p)
        if x//2==0:
                return(x/2)
        else:
                return((1+x)/2)
```

(c) Si $X(\omega)$ est paire (non nulle car $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$) alors $X(\omega)/2$ est un entier non nul
Si $X(\omega)$ est impaire alors $X(\omega)+1$ est paire non nul et $[X(\omega)+1]/2$ est un entier non nul
Conclusion : $\boxed{T \text{ prend des valeurs entières non nulles.}}$

(d) Soit k un entier naturel non nul alors $2k \in X(\Omega)$ et est pair. Donc $2k/2 = k \in T(\Omega)$
Finalement, $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \subset T(\Omega)$
Conclusion : $\boxed{T(\Omega)=\mathbb{N}^*}$

(e) $(T=k)$ peut être réalisé avec X pair auquel cas $X=2k$, ou avec X impair, auquel cas $X=2k-1$ (pour que $\dfrac{1+X}{2}$ soit égal à T)
Conclusion : $\boxed{(T=k)=(X=2k)\cup(X=2k-1)}$ événements incompatibles
et comme $2k-1 \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=k) &= q^{2k-1}p+q^{2k-2}p\\ &= q^{2k-2}p(1+q)\\ &= q^{2k-2}(1-q)(1+q)\\ &= q^{2(k-1)}\left(1-q^2\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{T \text{ suit également une loi } \mathcal{G}\left(1-q^2\right), \text{ comme } Z}$

Problème :

Partie 1 : préliminaires

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

   (a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout couple (x,y) d'éléments de $[0,1]$ on a : $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0,n-1]],\ \forall t \in \left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right],\ \left|f(t)-f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t-\dfrac{k}{n}\right)$

   (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0,n-1]]$,

   $$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}$$

   (d) En sommant la relation précédente, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}$

   (e) Conclure finalement que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,dt.$

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$

   (a) Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q)=\dfrac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$.

   (b) En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q)=\dfrac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$.

   (c) Déterminer$I(p+q,0)$ et montrer finalement que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I(p,q)=\dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3. Informatique.
   Compléter la déclaration suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p,q)$:

```
def I(p,q):
        if q==0:
                i=...
        else:
                i=...
        return(i)
```

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\}$

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[[0, n-1]]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.

1. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y, puis montrer par un calcul de somme que $E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$
2. Donner la loi de X_1

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. (a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :
$$\mathrm{P}(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$
(b) Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme
$$\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$
(c) Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\frac{m(n-1)}{2n}$
(d) En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)$
Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n-1)$ est égale à $\frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.
(e) En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$

4. (a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout i de $X_n(\Omega)$, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = i)$.
(b) (*) En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.
(c) Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = V(X)$.

Partie 1 : préliminaires

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.
(a) f étant C^1, f' est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée.
Donc il existe un réel M tel que, pour tout $x \in [0,1]$: $|f'(x)| \leq Mf$
Et l'inégalité des accroissements finis donne alors pour tout $x, y \in [0,1]$
Conclusion : $\boxed{|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|}$
(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0, n-1]]$, on a $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n} \in [0,1]$
Donc $\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a t et $\frac{k}{n} \in [0,1]$ donc $\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$
(c) On écrit $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ sous forme d'intégrale : $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right)dt$ intégrale d'une constante.
Donc $\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)dt\right| \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|dt$ car $\frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n}$
$\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} M\left(t - \frac{k}{n}\right)dt = \left[\frac{M}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{M}{2n^2}$
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0, n-1]],\ \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}}$

(d) On découpe $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt$ et il vient par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}}$

(e) Et quand $n \to +\infty$: $\frac{M}{2n} \to 0$ et par encadrement ($|| \geq 0$) $\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to 0$.

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,dt.}$

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx$

(a) Méthode : Pour modifier des puissances dans une intégrale, on intègre par parties.
$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx$ et $I(p+1,q-1) = \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx$.
Soit $u'(x) = x^p : u(x) = \frac{1}{p+1}x^{p+1} : v(x) = (1-x)^q : v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$ avec u et v C^1 car $q-1 \geq 0$ donc

$$\begin{aligned}I(p,q) &= \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(1-x)^q\right]_0^1 - \int_0^1 -q(1-x)^{q-1}\frac{1}{p+1}x^{p+1}dx \\ &= 0 - 0 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 (1-x)^{q-1}x^{p+1}dx\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1).}$

(b) On a alors par récurrence sur q :

pour $q = 0 : \forall p \in \mathbb{N},\quad \frac{p!0!}{(p+0)!}I(p+0,0) = I(p,0)$

Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N},\quad (p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$

alors $I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1}I(p+1,q)$ car $q+1 \geq 1$ donc (HR)

$$\begin{aligned}I(p,q+1) &= \frac{q+1}{p+1}\frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!}I(p+1+q,0) \\ &= \frac{p!\,(q+1)!}{(p+1+q)!}I(p+1+q,0)\end{aligned}$$

et par récurrence,

Conclusion : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0).}$

(c) On a $I(p+q,0) = \int_0^1 x^{p+q}dx = \left[\frac{1}{p+q+1}x^{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$ donc

$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0) = \frac{1}{p+q+1}\frac{p!q!}{(p+q)!}$

Conclusion : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.}$

3. Informatique.

```
import numpy as np
def I(p,q):
        r=np.prod(range(1,p))
        s=...
        t=...
        i=...
        return(i)
```

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.

On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\}$

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[[0, n-1]]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.

1. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$.
   On a alors $E(Y) = mp$ et $V(Y) = mp(1-p)$.
   Or $V(Y) = E\left(Y^2\right) - E(Y)^2$ donc $E\left(Y^2\right) = V(Y) + E(Y)^2 = mp(1-p) + m^2p^2 = mp(1-p+mp)$
   et $E(Y(Y-1)) = E\left(Y^2 - Y\right) = E\left(Y^2\right) - E(Y) = mp(1-p+mp) - mp$
   Conclusion : $\boxed{E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2}$
2. Pour $k=0$ la loi de $X_{1/U_1=0}$ est $\mathcal{B}(m,0)$ donc $\mathrm{P}_{U_1=0}(X_1 = 0) = 1$
   Et comme U_1 suit une loi uniforme sur $\{0\}$, $\mathrm{P}(U_1 = 0) = 1$.
   Donc $\mathrm{P}(X_1 = 0) = \mathrm{P}(U_1 = 0 \cap X_1 = 0) = \mathrm{P}(U_1 = 0)\,\mathrm{P}_{U_1=0}(X_1 = 0) = 1$.
   Conclusion : $\boxed{X_1 \text{ est égale à 0 presque surement.}}$

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. (a) Quand $U_n = k$ (l'univers restreint) la loi de X_n est $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$ donc $X_n(U_n = k) = [[0, m]]$
   Et comme $\Omega = \cup_{k=0}^{n-1}(U = k)$ alors $X_n(\Omega) = \cup_{k=0}^{n-1}[[0, m]]$
   Conclusion : $\boxed{X_n(\Omega) = [[0, m]]}$
   Pour tout $i \in [[0, m]]$, $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ est un système complet d'événement donc

$$\mathrm{P}(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(U_1 = k)\,\mathrm{P}_{U_1=k}(X_n = i)$$

   avec$\mathrm{P}(U_1 = k) = \frac{1}{n}$ (loi uniforme sur n valeurs) et $\mathrm{P}_{U_1=k}(X_n = i) = \binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i}$ (loi $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$) donc

$$\mathrm{P}(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

   (b) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$ alors $E(Y) = m\frac{k}{n}$ et

$$\begin{aligned} m\frac{k}{n} &= \sum_{i=0}^{m} i\mathrm{P}(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = m\frac{k}{n}}$
   et donc

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{i=1}^{m} i\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \text{ interversion des } \sum \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} i\frac{1}{n}\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}m\frac{k}{n} \\ &= \frac{m}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}}$

(c) On a, par le théorème de transfert, pour $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$

$$\begin{aligned} E\left(Y\left(Y-1\right)\right) &= \sum_{i=0}^{m} i\left(i-1\right) \mathrm{P}\left(Y=i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} i\left(i-1\right) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{i=1}^{m} i\left(i-1\right) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = m\left(m-1\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{2}}$

Donc

$$\begin{aligned} E\left[X_n\left(X_n-1\right)\right] &= \sum_{i=0}^{m} i\left(i-1\right) \mathrm{P}\left(X_n=i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} i\left(i-1\right) \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i} + 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} i\left(i-1\right) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-i}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m\left(m-1\right)}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{2} \\ &= \frac{m\left(m-1\right)}{n^3} \frac{\left(n-1\right) n\left(2n-1\right)}{6} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E\left[X_n\left(X_n-1\right)\right] = \frac{m\left(m-1\right)\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{6n^2}}$

(d) On a $E\left[X_n\left(X_n-1\right)\right] = E\left(X_n^2\right) - E\left(X_n\right)$ donc

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= E\left[X_n\left(X_n-1\right)\right] + E\left(X_n\right) \\ &= \frac{m\left(m-1\right)\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{6n^2} + \frac{m\left(n-1\right)}{2n} \\ &\quad \text{et} \\ V\left(X\right) &= E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 \\ &= \frac{m\left(m-1\right)\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{6n^2} + \frac{m\left(n-1\right)}{2n} - \left[\frac{m\left(n-1\right)}{2n}\right]^2 \\ &= \frac{m\left(n-1\right)}{12n^2} \left[2\left(m-1\right)\left(2n-1\right) + 6n - 3m\left(n-1\right)\right] \\ &= \frac{m\left(n-1\right)}{12n^2} \left[m+2n+mn+2\right] \text{ et on constate} \\ &= \frac{m\left(n-1\right)}{12n^2} \left(m+2\right)\left(n+1\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V\left(X\right) = \frac{m\left(m+2\right)\left(n^2-1\right)}{12n^2}}$

4. (a) Pour $i \in [[0, m]]$, on avait trouvé$\mathrm{P}\left(X_n=i\right) = \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$

On y reconnaît une somme de Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} &= \binom{m}{i} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \binom{m}{i} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

avec pour tout $x \in [0,1]$: $f\left(x\right) = \left(x\right)^{i}\left(1-x\right)^{m-i}$ de classe C^1 sur $[0,1]$ car $m-i \in \mathbb{N}$;
on a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 x^i \left(1-x\right)^{m-i} dx &= I\left(i, m-i\right) \\ &= \frac{i!\left(m-i\right)!}{\left(m+1\right)!} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\to\frac{i!\,(m-i)!}{(m+1)!}\binom{m}{i}=\frac{1}{m+1}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } i \text{ de } X_n(\Omega) : \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = i) = \frac{1}{m+1}}$

(b) *Conclusion :* $\boxed{\text{la suite } (X_n) \text{ converge donc en loi vers variable aléatoire } X \text{ de loi } \mathcal{U}_{[[0,m]]}}$

(c) On a $E(X) = \frac{m}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(m+1)^2 - 1}{12}$ (hors programme)

et $E(X_n) = \dfrac{m(n-1)}{2n} = \dfrac{m(1-1/n)}{2} \to \dfrac{m}{2}$

et $V(X_n) = \dfrac{m(m+2)\left(n^2-1\right)}{12n^2} = \dfrac{m(m+2)\left(1-1/n^2\right)}{12} \to \dfrac{m(m+2)}{12}$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = V(X).}$