Devoir Surveillé n° 2

Le 02/12/23 **Durée : 4 heures**

Exercice 1

Pour tout entier n entier naturel, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, f_n(x) = \mathrm{e}^x + nx^2 - 3$$

1. (a) Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition. Dresser son tableau de variations.
   (b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1 .
   (c) Ecrire un programme Python permettant de tracer la représentation graphique de la fonction f_n. On y trouvera notamment un fonction d'en-tête `def f(n,x)` pour définir la fonction.
   (d) Tracer dans un même repère les courbes de f_0, f_1 et f_2.
   (e) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.
   (f) Préciser la valeur de u_0.
   Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.
   (g) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0,1[$.
2. Écrire une fonction Python `dicho(n)` qui prend un entier n et qui calcule une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près par la méthode de dichotomie.
3. Montrer que : $\forall x \in]0,1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
4. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).
5. Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
6. On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
   Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + nu_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.
7. Donner enfin la valeur de ℓ.
8. Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

Exercice 2

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer la matrice $A(A-2I)^2$.
   (b) (*)En déduire les seules valeurs propres possibles de f
   (c) Déterminer une base de $Ker(f)$ et de $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, AX = 2X\}$.
   (d) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. On considère les vecteurs $u == (2,1,-2)$ et $v = (3,1,-2)$ $w = (-2,0,1)$
   (a) Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Exprimer $f(w)$ comme combinaison linéaire de v et w puis vérifier que la matrice de f dans la base (u,v,w) est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) (*) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

3. (a) On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Déterminer N^2 puis utiliser la formule du binôme pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

   (b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n

   (c) Proposer une matrice P telle que $A = PTP^{-1}$ puis déterminer P^{-1}.

   (d) Que faut-il taper dans Python pour obtenir la matrice P et son inverse ?

   (e) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$

   (f) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

   (g) Ecrire un programme Python qui demande à l'utilisateur un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et qui affiche A^n.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivantes toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X; Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

1.a. Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$

1.b. Établir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k - 1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

1.c. En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante

$$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \begin{cases} \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ \dfrac{1 + X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$$

2.a. Expliquer soigneusement ce que renvoie la fonction Python suivante.

```
import nympy.random as rd
def mystere(p):
        n=1
        while rd.random()<1-p:
                n=n+1
        return n
```

2.b. Écrire une fonction Python prenant en argument un réel p de $]0;1\,[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire T Ce programme pourra utiliser la fonction mystere précédente et on rappelle qu'en Python, l'exécution de `a // b` renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

2.c. Montrer que T prend des valeurs entières positives non nulles.

2.d. Réciproquement, justifier que tout entier naturel non nul k est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$

2.e. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction de certains évènements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Problème

Partie 1 : préliminaires

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

   (a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout couple (x,y) d'éléments de $[0,1]$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0,n-1]],\ \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right],\ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$

   (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0,n-1]]$,

   $$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}$$

   (d) En sommant la relation précédente, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}$

   (e) Conclure finalement que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,dt$.

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$

   (a) Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.

   (b) En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.

   (c) Déterminer$I(p+q,0)$ et montrer finalement que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3. Informatique.
   Compléter la déclaration suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p,q)$:

```
def I(p,q):
        if q==0:
                i=...
        else:
                i=...
        return(i)
```

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\}$

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[[0,n-1]]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.

1. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y, puis montrer par un calcul de somme que $E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$

2. Donner la loi de X_1

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. (a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathrm{P}(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

   (b) Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

   (c) Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\dfrac{m(n-1)}{2n}$

   (d) En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$

   Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n-1)$ est égale à $\dfrac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

   (e) En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\dfrac{m(m+2)\left(n^2-1\right)}{12n^2}$

4. (a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout i de $X_n(\Omega)$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(X_n = i)$.

   (b) (*) En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

   (c) Vérifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = V(X)$.