Problème 2

Correction proposée par Tom Dutilleul Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$, noté $\text{Card}\left(\{a, b, c\}\right)$, le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.
Par exemple, si $a = b = c$, alors $\text{Card}\left(\{a, b, c\}\right) = 1$; si $a = b$ et $a \neq c$, alors $\text{Card}\left(\{a, b, c\}\right) = 2$.

Commentaire

- De manière intuitive, un ensemble désigne une collection d'objets. La notation $\{a, b, c\}$ désigne alors la collection constituée des objets a, b et c. Derrière cette présentation, il y a un sous-entendu : les objets a, b et c sont différents. On a donc toujours, lorsqu'on utilise les notations habituelles :

$$\text{Card}\left(\{a, b, c\}\right) = 3$$

- Le concepteur se permet d'utiliser une notation différente. En particulier, il se propose de considérer l'ensemble $\{1, 1, 1\}$. Les collections dans lesquelles on autorise les objets à apparaître plusieurs fois sont généralement appelées des multiensembles. Dans le sujet, il n'est pas question de multiensembles mais bien d'ensembles. Le concepteur se permet donc d'utiliser la notation $\{1, 1, 1\}$ (resp. $\{1, 1, 2\}$) pour désigner l'ensemble qui ne contient que le réel 1. Cet ensemble est communément noté $\{1\}$ (resp. $\{1, 2\}$).
- Il est toujours étonnant de constater que des concepteurs se permettent d'utiliser des notations personnelles sans mettre en garde les candidats. On comprend que ce choix a été fait pour simplifier la présentation. Au lieu d'introduire une nouvelle notation, il était aussi possible d'introduire un nom. On pouvait par exemple signifier que les réels a, b et c sont les paramètres de la matrice $M(a, b, c)$. Dans cet exercice, on étudie :
  - × le cas où les 3 paramètres a, b et c sont égaux (**Partie B**).
  - × le cas où 2 des 3 paramètres a, b et c sont distincts, le dernier étant différent des deux autres (**Partie C**).
  - × le cas où les 3 paramètres a, b et c sont distincts (**Partie D**).

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite démontrer la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad M(a,b,c) \text{ est inversible } \Leftrightarrow ab + bc + ac + abc \neq 0$$

Partie A : Généralités

1. Justifier que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

Démonstration.
Soit (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\text{La matrice } M(a,b,c) \text{ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.}}$$

□

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Montrer que la matrice $M(a,b,c)$ ne peut admettre une unique valeur propre.
On pourra par exemple raisonner par l'absurde.

Démonstration.
On procède par l'absurde.
On suppose que la matrice $M(a,b,c)$ admet une unique valeur propre. Notons alors λ cette valeur propre.
D'après la question précédente, la matrice $M(a,b,c)$ est diagonalisable. Il existe alors :

× $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible,

× $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $M(a,b,c)$,

telles que : $M(a,b,c) = PDP^{-1}$.
Or $\text{Sp}\big(M(a,b,c)\big) = \{\lambda\}$. Donc : $D = \lambda \cdot I_3$. Ainsi :

$$M(a,b,c) \;=\; P\,(\lambda \cdot I_3)\,P^{-1} \;=\; \lambda \cdot P\; I_3\; P^{-1} \;=\; \lambda \cdot PP^{-1} \;=\; \lambda \cdot I_3$$

Absurde.

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } M(a,b,c) \text{ ne peut avoir une unique valeur propre.}}$$ □

b) En déduire que la matrice $M(a,b,c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.

- Comme $M(a,b,c) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $M(a,b,c)$ possède au plus 3 valeurs propres distinctes.
- Comme $M(a,b,c)$, est diagonalisable, la matrice $M(a,b,c)$ admet au moins une valeur propre.
- Enfin, d'après la question précédente, la matrice $M(a,b,c)$ ne peut admettre une unique valeur propre.

$$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } M(a,b,c) \text{ possède soit deux soit trois valeurs propres distinctes.}}$$ □

3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M(a,b,c)$.

a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.

Démonstration.

- Par définition :

$$M(a,b,c) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

- On en déduit :

× $\text{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et ainsi, par isomorphisme de représentation : $f(e_1) = (1+a) \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$.

× $\text{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+b \\ 1 \end{pmatrix}$. Et ainsi : $f(e_2) = 1 \cdot e_1 + (1+b) \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$.

× $\text{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\big(f(e_3)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+c \end{pmatrix}$. Et ainsi : $f(e_3) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (1+c) \cdot e_3$.

- On en conclut :

  × $f(e_2) = (1+b)\cdot e_2 + 1\cdot e_1 + 1\cdot e_3$ et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 1+b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  × $f(e_1) = 1\cdot e_2 + (1+a)\cdot e_1 + 1\cdot e_3$ et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+a \\ 1 \end{pmatrix}$.

  × $f(e_3) = 1\cdot e_2 + 1\cdot e_1 + (1+c)\cdot e_3$ et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}\big(f(e_3)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+c \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} = M(b,a,c).}$$

Commentaire

- Remarquons tout d'abord que la famille $\mathscr{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
  En effet, c'est une famille :
  × libre car la famille (e_1, e_2, e_3) l'est,
  × telle que $\mathrm{Card}\,\big(\mathscr{B}'\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.
- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à $M(a,b,c)$, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
  Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

  Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{array}{rcl} f & \longleftrightarrow & M(a,b,c) \\ \text{expression de } f(e_1) \text{ dans } (e_1,e_2,e_3) & \longleftrightarrow & \text{expression de } M(a,b,c)\times E_1 \text{ dans } (E_1,E_2,E_3) \\ & & (\text{ou pour tout } i \in [\![1,3]\!],\ E_i = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(e_i)) \end{array}$$

  Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme. □

b) En déduire que les matrices $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration.
D'après la question précédente, les matrices $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes (respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}\,\big(M(a,b,c)\big) = \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}\,\big(M(b,a,c)\big).}$$

□

c) De la même façon, montrer que les matrices $M(a,b,c)$ et $M(a,c,b)$ ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration.

- En opérant de la même manière qu'en question ***3.a)***, on démontre :

$$\text{Mat}_{(e_1,e_3,e_2)}(f) = M(a,c,b)$$

- Ainsi, les matrices $M(a,b,c)$ et $M(a,c,b)$ représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes (respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'' = (e_1, e_3, e_2)$).

$$\boxed{\text{On en déduit : Sp}\left(M(a,b,c)\right) = \text{Sp}(f) = \text{Sp}\left(M(a,c,b)\right).}$$

□

Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a,b,c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a,b,c).

Partie B : Cas où $\text{Card}\left(\{a,b,c\}\right) = 1$

4. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(0,0,0)$.

a) Calculer J^2. Déterminer alors un polynôme annulateur de J.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$J^2 = \left(M(0,0,0)\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot J$$

- On en déduit : $J^2 - 3 \cdot J = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, le polynôme } Q(X) = X^2 - 3\,X \text{ est un polynôme annulateur de } J.}$$

□

b) En déduire les valeurs propres de J et préciser une base des sous-espaces propres de J.

Démonstration.

- D'après la question précédente, $Q(X) = X^2 - 3\,X = X\,(X-3)$ est un polynôme annulateur de J. Ainsi :

$$\text{Sp}(J) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, 3\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : Sp}(J) \subset \{0,3\} \text{ et } 0 \text{ et } 3 \text{ sont les deux valeurs propres possibles de } J.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.

Commentaire

- Si Q est un polynôme annulateur de J alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de J puisque :
$$(\alpha\, Q)(J) \;=\; \alpha\, Q(J) \;=\; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
Cela suffit à démontrer que J possède une infinité de polynômes annulateurs.
On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de J puisque :
$$R(J) \;=\; (J - 5\, I)\, Q(J) \;=\; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de J. Si c'était le cas, J aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- La matrice J possède deux colonnes égales ($C_1 = C_2$). Ainsi, J n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est bien valeur propre de } J.}$$

- D'autre part :
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(J - 3 \cdot I_3) \quad &= \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$
La réduite obtenue est non inversible car possède deux lignes colinéaires ($L_3 = -L_2$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } J - 3 \cdot I_3 \text{ est non inversible. On en déduit que 3 est bien une valeur propre de } J.}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer que la matrice $J - 3 \cdot I_3$ est non inversible en exhibant une relation de dépendance linéaire non triviale entre les colonnes de cette matrice. Par exemple, si on note, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de $J - 3 \cdot I_3$, on a :
$$C_1 + C_2 + C_3 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$
La famille constituée par les trois vecteurs colonnes de $J - 3 \cdot I_3$ est donc liée. Et ainsi, $J - 3 \cdot I_3$ est non inversible.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, comme 0 et 3 sont les deux seules valeurs propres} \\ \text{possibles de } J \text{, on en déduit : } \mathrm{Sp}(J) = \{0, 3\}.\end{array}}$$

- Déterminons $E_0(J)$, le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 0.

  Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_0(J) & \iff & J\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_0(J) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y - z \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

  La famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

  × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  × génératrice de $E_0(J)$ (d'après ce qui précède).

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(J).}$$

- Déterminons $E_3(J)$, le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 3.

  Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_3(J) & \Longleftrightarrow & (J - 3 \cdot I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6\,x & & & = & -6\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(J) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \quad \texttt{ET} \quad y = z \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

  La famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

  × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  × génératrice de $E_3(J)$ (d'après ce qui précède).

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_3(J).}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(J)$ par lecture de la matrice $J - \lambda \cdot I_3$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 3$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_3(J)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(J - 3 \cdot I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ (d'après ce qui précède). Or :

  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut prendre $x = y = z = 1$ (on reprend ici l'idée $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ exposée en début de question). On obtient alors :

  $$E_3(J) \ \supset \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

  Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

  $$\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) \ = \ \dim\big(E_3(J)\big) \ + \ \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\mathrm{rg}(J - 3 \cdot I_3)}$$

  (par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

  Ainsi : $\dim\big(E_3(J)\big) = 3 - 2 = 1$ et l'égalité annoncée est vérifiée. □

c) Déterminer une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $J = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, la matrice $J = M(0, 0, 0)$ est diagonalisable.
- Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $J = P\,D\,P^{-1}$. Plus précisément :
  - × la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de J,
  - × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de J (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

$$\boxed{\text{En posant } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ on a donc : } J = PDP^{-1}.}$$

Commentaire

On a démontré en question précédente que la matrice J possède deux valeurs propres. À l'aide des bases des sous-espaces propres associés, on peut vérifier que la matrice $J \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est bien diagonalisable. C'est le cas car :

$$\dim\big(E_0(J)\big) + \dim\big(E_3(J)\big) \ = \ 2 + 1 \ = \ 3 \ = \ \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$$

□

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier : $M(a,a,a) = P\,(a\,I_3 + D)\,P^{-1}$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} P\left(a \cdot I_3 + D\right) P^{-1} & = & \left(a \cdot P + PD\right) P^{-1} & \textit{(par multiplication à gauche par } P\textit{)} \\ & = & a \cdot PP^{-1} + P\,D\,P^{-1} & \textit{(par multiplication à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ & = & a \cdot I_3 + J & \\ & = & a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \\ & = & \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} & \\ & = & M(a,a,a) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } M(a,a,a) = P\,(a \cdot I_3 + D)\,P^{-1}.}$$

□

b) En déduire que la matrice $M(a,a,a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a.

Démonstration.

- D'après la question précédente, les matrices $M(a,a,a)$ et $a \cdot I_3 + D$ sont semblables. Elles représentent donc un même endomorphisme g dans des bases différentes.

$$\boxed{\text{En particulier : } \mathrm{Sp}\left(M(a,a,a)\right) = \mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}\left(a \cdot I_3 + D\right).}$$

- Or :

$$a \cdot I_3 + D \;=\; a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

La matrice $a \cdot I_3 + D$ étant diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}\left(M(a,a,a)\right) = \mathrm{Sp}\left(a \cdot I_3 + D\right) = \{a, a+3\}.}$$

□

c) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,a)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} M(a,a,a) \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & 0 \text{ n'est pas valeur propre de } M(a,a,a) \\ & \Leftrightarrow & 0 \notin \mathrm{Sp}\left(M(a,a,a)\right) = \{a, a+3\} \\ & \Leftrightarrow & a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+3 \neq 0 \end{array}$$

- Notons $b = a$ et $c = a$.

$$\begin{array}{rcl} ab+bc+ac+abc \neq 0 & \Leftrightarrow & a^2+a^2+a^2+a^3 \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & 3\,a^2+a^3 \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a^2\,(3+a) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a^2 \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad 3+a \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+3 \neq 0 \end{array}$$

- En conclusion, lorsque $a = b = c$:

$$\begin{array}{rcl} M(a,b,c) \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+3 \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & ab+bc+ac+abc \neq 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{La propriété } (*) \text{ est donc bien vérifiée dans le cas où } a = b = c.}$$

□

Partie C : Cas où $\mathrm{Card}\left(\{a,b,c\}\right) = 2$

6. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$.
On note $C = M(0,0,c)$.

a) Justifier que 0 est une valeur propre de C.

Démonstration.

- On a :

$$C = M(0,0,c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

- La matrice C possède deux colonnes égales ($C_1 = C_2$). Ainsi, C n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est bien valeur propre de } C.}$$

□

b) Soit λ un réel non nul.

(i) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$CX \ = \ \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = (\lambda - 2)\, x \\ \big(\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c\big)\, x = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration.

$$\begin{array}{cl}
 & CX \ = \ \lambda X \\[2mm]
\Longleftrightarrow & (C - \lambda I_3)\ X \ = \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4mm]
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\, x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)\, y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda+c)\, z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
\underset{}{\overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & + & y & + & (1-\lambda)\, x & = & 0 \\ z & + & (1-\lambda)\, y & + & x & = & 0 \\ (1-\lambda+c)\, z & + & y & + & x & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda+c)\, L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & + & y & + & (1-\lambda)\, x & = & 0 \\ & - & \lambda\, y & + & \lambda\, x & = & 0 \\ & & (\lambda - c)\, y & + & \big(1 - (1-\lambda)(1-\lambda+c)\big)\, x & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & + & y & + & (1-\lambda)\, x & = & 0 \\ & - & y & + & x & = & 0 \\ & & (\lambda - c)\, y & + & \big(-\lambda^2 + (c+2)\,\lambda - c\big)\, x & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
\overset{L_3 \leftrightarrow L_3 - (\lambda - c)\, L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & + & y & + & (1-\lambda)\, x & = & 0 \\ & - & y & + & x & = & 0 \\ & & & & \big(-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c\big)\, x & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
\overset{L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} z & & & + & (2-\lambda)\, x & = & 0 \\ & - & y & + & x & = & 0 \\ & & & & \big(-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c\big)\, x & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} z \ = \ (\lambda - 2)\, x \\ y \ = \ x \\ \big(-\lambda^2 + (c+3)\,\lambda - 2c\big)\, x \ = \ 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

(cette opération est valide car $\lambda \neq 0$)

$$\boxed{\text{L'équivalence énoncée est bien vérifiée.}}$$

Commentaire

- Dans l'équivalence fournie par l'énoncé, les variables y et z s'expriment à l'aide de la variable x. La variable x va donc prendre le rôle de variable auxiliaire lors de la résolution de système par l'algorithme du pivot de Gauss. Cela explique, après coup, pourquoi la première étape consiste à échanger les colonnes 1 et 3.
- L'algorithme du pivot de Gauss est généralement écrit à l'aide d'opérations sur les lignes du système. Si on suit le déroulé classique, on obtient la résolution suivante :

$$\begin{aligned}
CX = \lambda \cdot X &\iff (C - \lambda \cdot I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\, x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)\, y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda+c)\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-\lambda+c)\, z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)\, y & + & z & = & 0 \\ (1-\lambda)\, x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)\, L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-\lambda+c)\, z & = & 0 \\ & - & \lambda\, y & + & (\lambda - c)\, z & = & 0 \\ & & \lambda\, y & + & \big(-\lambda^2 + (c+2)\, \lambda - c\big)\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-\lambda+c)\, z & = & 0 \\ & - & \lambda\, y & + & (\lambda - c)\, z & = & 0 \\ & & & & \big(-\lambda^2 + (c+3)\, \lambda - 2c\big)\, z & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On obtient un système sous forme triangulaire. Le coefficient devant z en dernière ligne rend la suite du travail difficile. Par ailleurs, par cette méthode, on ne fait pas apparaître le terme $(\lambda - 2)\, x$. Il est donc préférable d'écarter cette piste. □

(ii) En déduire : λ est une valeur propre de $C \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - (c+3)\, \lambda + 2c = 0$.

Démonstration.
On raisonne par double implication.

$(\Rightarrow)$ Supposons que λ est valeur propre de C.

Il existe alors un vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $CX = \lambda \cdot X$.

- D'après la question précédente, on en déduit :
  a) $z = (\lambda - 2)\, x$
  b) $y = x$
  c) $\big(\lambda^2 - (c+3)\, \lambda + 2c\big)\, x = 0$

- Démontrons : $x \neq 0$. On raisonne par l'absurde.
  Supposons $x = 0$. Alors :
  - × d'après ***a)*** : $z = (\lambda - 2) \times 0 = 0$.
  - × d'après ***b)*** : $y = 0$.

  On en déduit $X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Absurde !
- D'après ***c)*** : $\big(\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c\big)\, x = 0$.
  Comme $x \neq 0$, on en déduit : $\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lambda \text{ est une valeur propre de } C \ \Rightarrow\ \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0.}$$

($\Leftarrow$) Supposons $\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.

Notons alors : $x = 1$ (par exemple), $y = x = 1$, $z = (\lambda - 2)\, x = \lambda - 2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$CX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2 + (1+c)(\lambda - 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \cancel{2} + \lambda - \cancel{2} + \lambda c - 2c \end{pmatrix}$$

Or, comme : $\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$, alors : $\lambda^2 - 3\,\lambda = \lambda c - 2c$

et : $\lambda^2 - 2\,\lambda = \lambda c - 2c + \lambda$.

Finalement :

$$CX = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda^2 - 2\,\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda\, X$$

On a donc trouvé $X \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ tel que $CX = \lambda\, X$.
Cela démontre que λ est valeur propre de C.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lambda \text{ est une valeur propre de } C \ \Leftarrow\ \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0.}$$

□

c) Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)***, le réel 0 est valeur propre de la matrice C.
- D'après la question précédente, un réel λ **différent de** 0 est valeur propre de C si et seulement si $\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.

  Considérons alors le polynôme $R(X) = X^2 - (c+3)\, X + 2c$.
  Il admet pour discriminant :

$$\Delta_1 = (c+3)^2 - 8c = (c^2 + 6c + 9) - 8c = c^2 - 2c + 9$$

  Il s'agit alors de déterminer le signe de Δ_1. Ce discriminant apparaît lui-même comme un polynôme de degré 2, en la variable c.

  Considérons alors le polynôme $T(X) = X^2 - 2X + 9$. Son discriminant est :

$$\Delta_2 = (-2)^2 - 4 \times 9 = 4 - 36 = -32 < 0$$

  On en déduit que la fonction $t : x \mapsto x^2 - 2x + 9$ est de signe constant. Or : $t(0) = 9 > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Delta_1 > 0 \text{ et le polynôme } R \text{ admet deux racines distinctes } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2.}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer :

$$\begin{array}{rcl} c^2 - 2c + 9 & = & \big((c-1)^2 - 1\big) + 9 \\ & = & (c-1)^2 + 8 \ \geqslant\ 8 \qquad \textit{(car } (c-1)^2 \geqslant 0\textit{)} \\ & > & 0 \end{array}$$

- Soulignons enfin que $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. En effet, 0 n'est pas racine de R car $R(0) = 2c \neq 0$ (on a supposé $c \neq 0$ en début de question ***6***).

$$\boxed{\text{Ainsi, } C \text{ admet trois valeurs propres distinctes : } 0,\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2.}$$

Commentaire

- Dans cette question, on étudie un polynôme R dont l'expression dépend d'un paramètre c. Les racines d'un tel polynôme dépendent alors de c. Plus précisément, on aurait pu écrire :

$$\lambda_1 = \frac{(c+3) + \sqrt{c^2 - 2c + 9}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 = \frac{(c+3) - \sqrt{c^2 - 2c + 9}}{2}$$

  On obtient ici deux expressions plutôt compliquées et difficilement exploitables.
- Dans un tel cas de figure, il est souvent préférable de s'intéresser aux relations entre coefficients et racines. Détaillons ce point.

  Comme λ_1 et λ_2 sont deux racines distinctes de R, polynôme unitaire, on a :

$$\begin{array}{rcl} R(X) & = & (X - \lambda_1)\,(X - \lambda_2) \\ & = & X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, X + \lambda_1\, \lambda_2 \end{array}$$

  Or, par définition : $R(X) \ = \ X^2 - (c+3)\, X + 2c$.
  Ces deux polynômes étant égaux, ils ont les mêmes coefficients. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & c + 3 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 & = & 2c \end{array} \right.$$

  On obtient ainsi de l'information sur les deux racines λ_1 et λ_2 sans avoir à établir précisément leurs expressions. □

7. Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.

a. Exprimer $M(a, a, c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0, 0, c-a)$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} M(a,a,c) & = & \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+(c-a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\ & = & M(0,0,c-a) + a \cdot I_3 \end{array}$$

$$\boxed{M(a,a,c) = a \cdot I_3 + M(0,0,c-a)}$$

□

b. En déduire que la matrice $M(a,a,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.

- On sait que la matrice $M(0,0,c-a)$:
  - × est diagonalisable car symétrique réelle.
  - × admet 0 comme valeur propre car est non inversible.
  - × admet trois valeurs propres distinctes d'après la question ***6***. En effet, elle s'écrit sous la forme $M(0,0,u)$ avec $u = c-a \neq 0$ (par hypothèse).
    On note $\mu = 0$, μ_1 et μ_2 ces trois valeurs propres distinctes.

  Il existe donc une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $M(0,0,c-a)$ telles que :

$$M(0,0,c-a) = P\,D\,P^{-1}$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcl} M(a,a,c) & = & a \cdot I_3 + M(0,0,c-a) \\ & = & a \cdot PP^{-1} + P\,D\,P^{-1} \\ & = & P\,(a \cdot I_3)\,P^{-1} + P\,D\,P^{-1} \\ & = & P\,\big(a \cdot I_3 + D\big)\,P^{-1} \end{array}$$

  Ainsi, la matrice $M(a,a,c)$ est semblable à la matrice :

$$a \cdot I_3 + D \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & a+\mu_2 \end{pmatrix}$$

  Comme $M(a,a,c)$ et $a \cdot I_3 + D$ sont semblables, elles ont mêmes valeurs propres. La matrice $a \cdot I_3 + D$ étant diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\mathrm{Sp}\,\big(M(a,a,c)\big) \;=\; \mathrm{Sp}\,\big(a \cdot I_3 + D\big) = \{a, a+\mu_1, a+\mu_2\}$$

  Comme les valeurs propres μ_1 et μ_2 sont distinctes et non nulles, on en déduit que a, $a+\mu_1$ et $a+\mu_2$ sont trois réels distincts.

$$\boxed{\text{La matrice } M(a,a,c) \text{ possède bien trois valeurs propres distinctes.}}$$

□

c. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,c)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} M(a,a,c) \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & 0 \text{ n'est pas valeur propre de } M(a,a,c) \\ & \Leftrightarrow & 0 \notin \mathrm{Sp}\,\big(M(a,a,c)\big) = \{a, a+\mu_1, a+\mu_2\} \\ & \Leftrightarrow & a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+\mu_1 \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad a+\mu_2 \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad \mu_1 \neq -a \quad \texttt{ET} \quad \mu_2 \neq -a \\ & \Leftrightarrow & a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad -a \notin \{\mu_1, \mu_2\} \\ & \Leftrightarrow & a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad -a \text{ n'est pas valeur propre de } M(0,0,c-a) \end{array}$$

- Dans la suite, on note $u = c - a$. D'après ***6.b)(ii)*** :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } M(0,0,u) &\Leftrightarrow \lambda^2 - (u+3)\,\lambda + 2u = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \big((c-a)+3\big)\,\lambda + 2\,(c-a) = 0 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} & -a \text{ n'est pas valeur propre de } M(0,0,c-a) \\ \Leftrightarrow \quad & (-a)^2 - \big((c-a)+3\big)\,(-a) + 2\,(c-a) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 + (c-a)\,a + 3\,a + 2c - 2a \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \cancel{a^2} + (ac - \cancel{a^2}) + a + 2c \neq 0 \end{aligned}$$

- Notons $b = a$.

$$\begin{aligned} ab + bc + ac + abc \neq 0 &\Leftrightarrow a^2 + ac + ac + a^2 c \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a\,(a + 2c + ac) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad (a + 2c + ac) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a \neq 0 \quad \texttt{ET} \quad -a \text{ n'est pas valeur propre de } M(0,0,c-a) \\ &\Leftrightarrow M(a,a,c) \text{ inversible} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La propriété } (*) \text{ est donc bien vérifiée dans le cas où } b = a.}$$

□

8. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Card}\big(\{a,b,c\}\big) = 2$.
À l'aide de la conclusion de la question ***3.***, montrer que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété $(*)$ dans ce cas.

Démonstration.
Deux des réels a, b et c sont égaux. On note x ces deux réels et z le dernier.
La matrice $M(a,b,c)$ s'écrit alors $M(x,x,z)$, ou $M(x,z,x)$, ou $M(z,x,x)$.

- Tout d'abord, d'après la question ***3.*** :

$$\operatorname{Sp}\big(M(x,x,z)\big) \ = \ \operatorname{Sp}\big(M(x,z,x)\big) \ = \ \operatorname{Sp}\big(M(z,x,x)\big)$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}\big(M(a,b,c)\big) &= \operatorname{Sp}\big(M(x,x,z)\big) && \textit{(d'après ce qui précède)} \\ &= \{x, x+\mu_1, x+\mu_2\} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.}}\textit{)} \end{aligned}$$

où μ_1 et μ_2 sont les deux racines distinctes du polynôme : $R(X) = X^2 - \big((z-x)+3\big)\,X + 2\,(z-x)$.

$$\boxed{\begin{gathered}\text{On en déduit que la matrice } M(a,b,c) \text{ possède bien trois valeurs} \\ \text{propres distinctes } x,\ x+\mu_1 \text{ et } x+\mu_2.\end{gathered}}$$

- Comme deux des réels a, b et c sont égaux, on a, par définition de x et z : $abc = x^2\,z$.
Pour des raisons similaires : $ab + bc + ac = x^2 + x^2 + xz$. On en déduit :

$$\begin{aligned} M(a,b,c) \text{ inversible} &\Leftrightarrow 0 \notin \operatorname{Sp}\big(M(a,b,c)\big) \\ &\Leftrightarrow 0 \notin \operatorname{Sp}\big(M(x,x,z)\big) && \textit{(car } \operatorname{Sp}\big(M(a,b,c) = \operatorname{Sp}\big(M(x,x,z)\big)\textit{)} \\ &\Leftrightarrow x^2 + x^2 + xz + x^2 z = 0 && \textit{(car } M(x,x,z) \textit{ vérifie la propriété } (*) \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{7.c)}}\textit{)} \\ &\Leftrightarrow ab + bc + ac + abc = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } M(a,b,c) \text{ vérifie bien la propriété } (*).}$$

□

Partie D : Cas où Card$\big(\{a,b,c\}\big) = 3$

9. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$.
On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\}$ par :

$$\forall x \in D, \ g(x) \ = \ \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

a) Dresser le tableau de variations de g sur D en y précisant les limites en $+\infty$, en $-\infty$, ainsi qu'à gauche et à droite de a, de b et de c.

Démonstration.

- La fonction $h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ est dérivable sur $]-\infty, a[\, \cup \,]a, +\infty[$ car elle est l'inverse $h = \dfrac{1}{u_1}$ où $u_1 : x \mapsto x - a$:
  - × est dérivable sur $]-\infty, a[\, \cup \,]a, +\infty[$,
  - × `NE S'ANNULE PAS` sur $]-\infty, a[\, \cup \,]a, +\infty[$.

  En particulier, h_1 est dérivable sur D.
  On démontre de même que $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x-b}$ et $h_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x-c}$ sont dérivables sur D.

  La fonction $g = h_1 + h_2 + h_3$ est dérivable sur D comme somme de fonctions dérivables sur D.

- Soit $x \in D$.

$$g'(x) \ = \ -\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} - \frac{1}{(x-c)^2} < 0 \qquad \textit{(car somme de termes strictements négatifs)}$$

  On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	‖ $-$	‖ $-$	‖ $-$	
Variations de g	$0 \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow 0$	

- Détaillons les éléments de ce tableau. On note $x_1 = a$, $x_2 = b$ et $x_3 = c$. Soit $i \in [\![1,3]\!]$.
  - × comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - x_i) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} h_i(x) = 0$.

    Ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 + 0 + 0 = 0$.
  - × en posant le changement de variable $t = x - x_i$, on obtient :

$$\lim_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} \frac{1}{x - x_i} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{1}{t} = -\infty$$

    De plus, si $j \in [\![1,3]\!]$ et $j \neq i$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} \dfrac{1}{x - x_j} = \dfrac{1}{x_i - x_j}$ (réel fini).

    Ainsi, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$: $\lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} g(x) = -\infty$.

× en posant le changement de variable $t = x - x_i$, on obtient :

$$\lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} \frac{1}{x - x_i} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t} = +\infty$$

De plus, si $j \in [\![1, 3]\!]$ et $j \neq i$, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} \frac{1}{x - x_j} = \frac{1}{x_i - x_j}$ (réel fini).

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } i \in [\![1, 3]\!] : \lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} g(x) = +\infty.}$$

× comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x - x_i) = +\infty$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h_i(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 + 0 + 0 = 0.}$$

□

b) En déduire que l'équation $g(x) = 1$, d'inconnue $x \in D$, admet exactement trois solutions distinctes λ_1, λ_2, λ_3, vérifiant : $a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, 2]\!]$. La fonction g est :
  × continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ (car dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$),
  × strictement décroissante sur $]x_i, x_{i+1}[$.

  Ainsi g réalise une bijection de $]x_i, x_{i+1}[$ dans $g\big(]x_i, x_{i+1}[\big)$.

$$g\big(]x_i, x_{i+1}[\big) = \Big] \lim_{x\to x_{i+1}^+} g(x), \lim_{x\to x_i^-} g(x) \Big[=]-\infty, +\infty[$$

  Or $1 \in]-\infty, +\infty[$.
  On en déduit que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution sur $]x_i, x_{i+1}[$, notée λ_i.
- De même, g réalise une bijection de $]c, +\infty[$ dans :

$$g\big(]c, +\infty[\big) = \Big] \lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to c} g(x) \Big[=]0, +\infty[$$

  Or $1 \in]0, +\infty[$.
  On en déduit que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution sur $]c, +\infty[$, notée λ_3.
- De même, on démontre encore :

$$g\big(]-\infty, a[\big) = \Big] \lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to a} g(x) \Big[=]-\infty, 0[$$

  Et comme $1 \notin]-\infty, 0[$, alors l'équation $g(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $]-\infty, a[$.

En résumé, l'équation $g(x) = 1$:
× n'admet pas de solution sur $]-\infty, a[$.
× admet une unique solution λ_1 sur $]a, b[$.
× admet une unique solution λ_2 sur $]b, c[$.
× admet une unique solution λ_3 sur $]c, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, l'équation } g(x) = 1 \text{ admet exactement trois solutions sur } D \\ \text{qui vérifient : } a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3.\end{array}}$$

□

c) Soit $\lambda \in D$ une solution de l'équation $g(x) = 1$.

On note X_λ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par : $X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda - a} \\ \dfrac{1}{\lambda - b} \\ \dfrac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix}$.

Montrer que X_λ est un vecteur propre de la matrice $M(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que comme $\lambda \in D$, alors la matrice X_λ est bien définie. De plus : $X_\lambda \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
- On a :

$$\begin{aligned} M(a,b,c)\, X_\lambda &= \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-a} \\ \frac{1}{\lambda-b} \\ \frac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1+a}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} \\ \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1+b}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} \\ \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1+c}{\lambda-c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Or, par définition de λ :

$$\begin{array}{lrcl} & g(\lambda) &=& 1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} &=& 1 \\ \text{ainsi} & \left(\dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{a}{\lambda-a}\right) + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} &=& 1 + \dfrac{a}{\lambda-a} \;=\; \dfrac{(\lambda-\cancel{a})+\cancel{a}}{\lambda-a} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \dfrac{1+a}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} = \lambda\, \dfrac{1}{\lambda-a}.}$$

$$\boxed{\text{En raisonnant de même, on démontre : } \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1+b}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} = \lambda\, \dfrac{1}{\lambda-b}.}$$

$$\boxed{\text{Et aussi : } \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1+c}{\lambda-c} = \lambda\, \dfrac{1}{\lambda-c}.}$$

- Finalement :

$$M(a,b,c)\, X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda\, \dfrac{1}{\lambda-a} \\ \lambda\, \dfrac{1}{\lambda-b} \\ \lambda\, \dfrac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda-a} \\ \dfrac{1}{\lambda-b} \\ \dfrac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix} = \lambda \cdot X_\lambda$$

On a démontré qu'il existe $X_\lambda \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ tel que $M(a,b,c)\; X_\lambda = \lambda \cdot X_\lambda$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } \lambda \text{ est valeur propre de } M(a,b,c) \text{ et } X_\lambda \text{ est un vecteur propre de } M(a,b,c) \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda.\end{array}}$$ □

d) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.

- Comme $M(a, b, c) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $M(a, b, c)$ admet au plus 3 valeurs propres.
- D'après la question ***9.c)***, tout réel λ solution de $g(x) = 1$ est valeur propre de $M(a, b, c)$. D'après l'étude menée en ***9.b)***, cette équation a trois solutions distinctes λ_1, λ_2 et λ_3.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}\left(M(a,b,c)\right) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.}$$

□

10. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Card}\left(\{a, b, c\}\right) = 3$.

Commentaire

Par l'écriture « Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ », on introduit un nouveau triplet (a, b, c). Ce triplet est donc, a priori, différent de celui introduit en question ***9***.
En particulier, on ne suppose pas ici : $a < b < c$.

a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Démonstration.
Les trois réels a, b et c sont distincts.
On note u le plus petit d'entre eux, w le plus grand et v le dernier.
On raisonne alors comme en question ***8***.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Sp}\left(M(a,b,c)\right) = \mathrm{Sp}\left(M(u,v,w)\right) \qquad \textit{(d'après la question 3)}$$

- Or, d'après la question précédente, les valeurs propres de $M(u, v, w)$ sont les solutions de l'équation :

$$\underbrace{\frac{1}{x-u} + \frac{1}{x-v} + \frac{1}{x-w}}_{\substack{\shortparallel \\ g(x) \ = \ \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}}} = 1$$

(par définition de u, v et w)

- Finalement :

$$\mathrm{Sp}\left(M(a,b,c)\right) = \mathrm{Sp}\left(M(u,v,w)\right) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid g(\lambda) = 1\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } M(a,b,c) \text{ admet bien trois valeurs propres distinctes.}}$$

□

b) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a, b, c)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} M(a,b,c) \text{ inversible} & \Leftrightarrow & 0 \notin \mathrm{Sp}\left(M(a,b,c)\right) \\ & \Leftrightarrow & 0 \notin \{\lambda \in \mathbb{R} \mid g(\lambda) = 1\} \\ & \Leftrightarrow & g(0) \neq 1 \end{array}$$

- Or :

$$\begin{aligned} g(0)=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{-a}+\frac{1}{-b}+\frac{1}{-c}=1 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{bc+ac+ab}{abc}=1 \\ &\Leftrightarrow \quad bc+ac+ab=-abc \qquad \textit{(en multipliant par } -abc\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad bc+ac+ab+abc=0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } M(ab,c) \text{ inversible } \Leftrightarrow g(0)\neq 1 \Leftrightarrow bc+ac+ab+abc\neq 0.}$$ □

11. On pose : $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice A est inversible.

Démonstration.

- On remarque :

$$A \;=\; \begin{pmatrix}1+0&1&1\\1&1+1&1\\1&1&1+2\end{pmatrix} \;=\; M(0,1,2)$$

- En notant $a=0$, $b=1$, $c=2$, on est dans le cas de la question ***10***. On a alors :

$$\begin{aligned} M(a,b,c) \text{ inversible} \quad &\Leftrightarrow \quad ab+bc+ac+abc\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0\times 1+1\times 2+0\times 2+0\times 1\times 2\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\neq 0 \end{aligned}$$

La dernière proposition étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\text{La matrice } M(0,1,2) \text{ est bien inversible.}}$$

Commentaire

- Il était aussi possible d'effectuer un calcul de rang.

$$\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale $M(a,b,c)$.

- Ce n'était certainement pas cette démonstration que le concepteur avait en tête. En effet, cette question ***11.*** apparaît comme une question bilan. Il s'agit de tester le recul des candidats sur l'exercice. Il est donc préférable d'utiliser les résultats de l'énoncé plutôt que d'effectuer un calcul de rang (ce qui pourrait ne pas rapporter tous les points alloués à cette question). □

b) On note α la plus grande valeur propre de A.

(i) Montrer : $4 < \alpha < 5$.

Démonstration.

- En notant $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, on est dans le cadre de l'application ***9***.
  On en conclut que A admet alors trois valeurs propres telles que : $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$.

$$\boxed{\text{En particulier, } \alpha = \lambda_3 > 2.}$$

- L'énoncé exige un résultat plus précis qui demande une étude plus fine. D'après la question ***9.***, les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation $g(x) = 1$ où g est une fonction qui admet pour tableau de variations :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	
Variations de g	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

  En particulier, g est strictement décroissante sur $]2, +\infty[$.

- On remarque alors :
  × $g(4) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4-1} + \dfrac{1}{4-2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3+4+6}{12} = \dfrac{13}{12} > 1$,
  × $g(\alpha) = 1$ par définition de α,
  × $g(5) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5-1} + \dfrac{1}{5-2} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{12+15+20}{60} = \dfrac{47}{60} < 1$.

On a donc : $g(5) < g(\alpha) < g(4)$.

- Notons h la réciproque de g sur $]2, +\infty[$.
  D'après le théorème de la bijection, $h :]0, +\infty[\to]2, +\infty[$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. En appliquant h de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} h\big(g(5)\big) & > & h\big(g(\alpha)\big) & > & h\big(g(4)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 5 & > & \alpha & > & 4 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } 4 < \alpha < 5.}$$

□

(ii) Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```
def valeur_approchée():
    x=4
    y=5
    while ... :
            m=(x+y)/2
            if 1/m+1/(m-1)+1/(m-2) ... :
                    ...
            else :
                    ...
    alpha=(x+y)/2
    return(alpha)
```

Démonstration.

- Afin de bien comprendre tous les mécanismes en jeu, on se permet d'apporter une réponse très détaillée à cette question, accompagnée d'un aparté sur la méthode de recherche par dichotomie. Il faut toutefois garder en tête qu'un tel niveau de détail n'est pas du tout attendu lors des concours. Fournir la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
  Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie

Données :

× une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

× un intervalle de recherche $[x, y]$,

× une précision de recherche ε.

Résultat : une valeur approchée à ε près d'un zéro (sur l'intervalle $[x, y]$) de la fonction f.
Autrement dit, une valeur approchée (à ε près) d'un réel $u \in [x, y]$ tel que : $f(u) = 0$.

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :

  × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de f.
  Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.

  × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de f.
  Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

  La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.
  On itère jusqu'à obtenir un intervalle I contenant un zéro de f et de largeur plus faible que ε.
  Les points de cet intervalle I sont tous de bonnes approximations du zéro de f contenu dans I.

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ continue sur l'**intervalle** $[x, y]$.

Supposons : $f(x)\ f(y) \leqslant 0$.

Alors il existe $c \in [x, y]$ tel que $f(c) = 0$.

Calcul des suites (x_j), (y_j), (m_j)

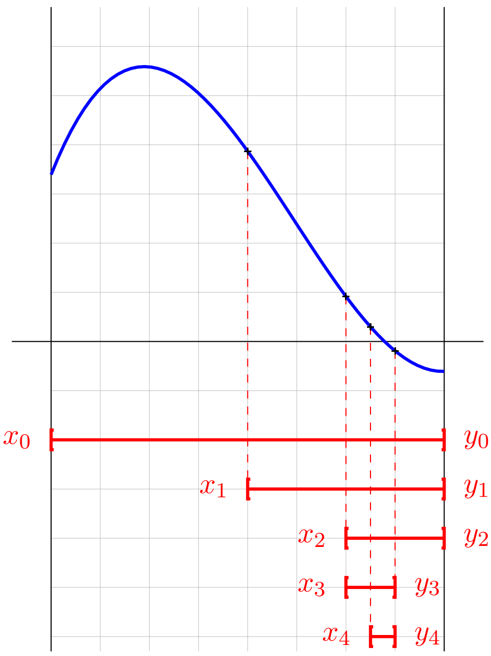
Cas $f(x) \geqslant 0$ et $f(y) \leqslant 0$

- Initialement, $x_0 = x$, $y_0 = y$
- À chaque tour de boucle (tant que $y_j - x_j > \varepsilon$) :

  × $m_j = \dfrac{x_j + y_j}{2}$ (point milieu de $[x_j, y_j]$)

  × si $f(m_j) > 0$ alors :
    * $x_{j+1} = m_j$
    * $y_{j+1} = y_j$

  × si $f(m_j) \leqslant 0$ alors :
    * $x_{j+1} = x_j$
    * $y_{j+1} = m_j$



- On construit ainsi une suite $\big([x_j, y_j]\big)_{j\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés :
  × contenant tous un zéro de f,
  × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.
  On cherche une valeur de u telle que : $g(u) = 1$. Considérons alors la fonction : $f : u \mapsto g(u) - 1$.
  On se fixe initialement l'intervalle de recherche $[4, 5]$ de sorte que l'équation $h(u) = 0$ ne possède qu'une solution, à savoir la valeur α qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables x et y destinées à contenir les valeurs succesives de x_j et y_j. Ces variables sont initialisées respectivement à 4 et 5.

```
    x = 4
    y = 5
```

  On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision 10^{-3} escomptée.

```
    while (y-x) > 10**(-3)
```

  On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

```
        m = (x+y) / 2
```

  Puis on teste si $f(\mathtt{m}) > 0$.
  Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de droite.

```
        if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) > 1
            x = m
```

  Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de droite.

```
        else
            y = m
```

  En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que 10^{-3} et contient un zéro de f. Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à 10^{-3} près de ce zéro.
  On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

```
    alpha = x
```

  On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

```
    alpha = y
```

  Ou encore le point milieu :

```
    alpha = (x + y) / 2
```

  Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus $\dfrac{10^{-3}}{2}$ de ce point milieu.
  On obtient ainsi une valeur approchée à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ du zéro recherché.

Commentaire

- On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :
  - × l'intervalle de recherche initial $[4, 5]$ est de largeur 1.
  - × la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.
    À la fin du $n^{\text{ème}}$ tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur $\dfrac{1}{2^n}$.
  - × l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que 10^{-3}.

  On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3} & \Leftrightarrow & 2^n \geqslant 10^3 & \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(2^n\right) \geqslant \ln\left(10^3\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n \ \ln(2) \geqslant 3 \ \ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant 3 \ \dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $\left\lceil 3 \ \dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ tours de boucle suffisent.

  On retiendra que si l'on souhaite obtenir une précision de 3 chiffres après la virgule, il suffit d'effectuer de l'ordre de 3 tours de boucle. Cet algorithme est donc extrêmement rapide.

- On obtient le programme complet suivant.

```
def valeur_approchée():
        x=4
        y=5
        while (y−x=>10**(−3)  :
        m=(x+y)/2
                if 1/m+1/(m−1)+1/(m−2) >1 :
                        x=m
                else :
                        y=m
        alpha=(x+y)/2
        return(alpha)
```

□

Commentaire

Dans le programme donné par l'énoncé, l'instruction :

```
11    alpha = (x + y) / 2
```

apparaît en ligne 11, comme dernière instruction de la boucle. Placée ainsi, il faut bien comprendre que l'instruction **alpha** `= (x + y) / 2` va être effectuée à chaque tour de boucle. Ainsi, la valeur de la variable **alpha** est écrasée à chaque tour de boucle. Il en résulte que la variable **alpha** contient en fin de boucle la dernière valeur qui lui a été affectée. De ce fait, on peut s'interroger sur la pertinence d'une telle présentation. Comme seule la dernière affectation **alpha** `= (x + y) / 2` permet de définir la valeur de la variable **alpha**, il apparaît bien plus raisonnable d'effectuer cette instruction une seule fois en sortie de boucle. C'est le choix qui est fait dans ce corrigé.