

CONCOURS BLANC

Option économique

MATHEMATIQUES

8 Janvier 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème 1

Partie 1 : Une loi de probabilité à deux paramètres

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient p, q deux réels de $]0; 1[$ tels que $p + q = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On dispose d'une urne contenant des boules rouges en proportion p et des boules vertes en proportion q . On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que l'on ait pioché n boules rouges. On suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note R_i (resp. V_i) l'événement : " le i -ième tirage amène une boule rouge (resp. verte) ". Ainsi, on a : $\forall i \in \mathbb{N}^*, P(R_i) = p$ et $P(V_i) = q$.

On note Z la variable aléatoire qui prend la valeur du nombre de boules vertes obtenues avant l'apparition de la n -ième boule rouge. On admet qu'on définit bien une variable aléatoire.

1. Quel est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z(\Omega)$?
2. Dans cette question, et dans cette question seulement on suppose que $n = 1$.
 - (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P([Z = k]) = pq^k$.
 - (b)
 - i. Montrer que la variable aléatoire $Z + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p .
 - ii. En déduire que Z admet une espérance et que $E(Z) = \frac{q}{p}$.
 - iii. En déduire que Z admet une variance et préciser sa valeur.
3. Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$.

On introduit alors les variables aléatoires X_1 et X_2 prenant pour valeurs respectives les rangs d'apparition de la première et de la deuxième boule rouge.

 - (a) Reconnaître la loi de X_1 .
 - (b) Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) .

(c) En déduire la loi marginale de X_2 .

Montrer alors que X_2 admet une espérance que l'on explicitera.

(d) Exprimer Z en fonction de X_2 .

En déduire que Z admet une espérance et qu'on a $E(Z) = \frac{2q}{p}$.

On dira qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{BN}(n, p)$ si elle suit la même loi que Z . En particulier, on retiendra le résultat noté $(\star)$ suivant, utile pour la suite :

Si $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(1, p)$, alors

$$(*) \quad X(\Omega) = \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = pq^n \quad \text{et} \quad E(X) = \frac{q}{p}.$$

4. Recopier et compléter la fonction Python suivante de sorte qu'elle renvoie une simulation d'une variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{BN}(n, p)$.

```
def simul_BN(n, p):  
    nR=0  
    t=1  
    while ... :  
        if rd.random()>1-p:  
            nR=nR+1  
        t=...  
    return (...)
```

Partie 2 : Un calcul statistique

Soit $N \in \mathbb{N}$. On rappelle que, si $(x_i)_{i \in [1, N]}$ et $(y_i)_{i \in [1, N]}$ sont deux séries statistiques,

- on désigne par $\bar{x}$ (resp. $\bar{y}$) la moyenne empirique associée à (x_i) (resp. à (y_i));
- σ_x et σ_y désignent les écarts-types empiriques des séries (x_i) et (y_i) .
- $\text{cov}(x, y)$ la covariance empirique de la série statistique double (x_i, y_i) ;
- $\rho(x, y)$ le coefficient de corrélation linéaire empirique de cette même série statistique double.

5. Rappeler les formules mathématiques définissant $\bar{x}$, σ_x^2 et $\text{cov}(x, y)$ en fonction des x_i , des y_i et de n .

Rappeler les formules de König-Huyguens qui permettent de reformuler σ_x^2 et $\text{cov}(x, y)$.

6. Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la covariance empirique d'un couple de série statistique (x, y) en argument

```
def covariance(x, y):  
    prod=x*y  
    return (...)
```

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{BN}(1, q)$.

On pose : $T = X_1 + X_2$ et $W = X_2 + X_3$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On souhaite construire deux séries statistiques (t_i) et (w_i) associées aux variables T et W (définies plus haut) et calculer leur coefficient de corrélation linéaire empirique.

7. (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante de sorte qu'elle renvoie un N -échantillon du couple (T, W) (c'est à dire un tableau à deux lignes qui sont respectivement des réalisations indépendantes des variables de T et W).

```
def sample_TW(p, N):  
    X_1=np.zeros(N)  
    X_2=np.zeros(N)  
    X_3=np.zeros(N)  
    for i in range(N):  
        X_1[i]=...
```

```

X_2[i]=...
X_3[i]=...
T=[X_1[i]+ X_2[i] for i in range(N)]
W=...
return ([...,...])

```

- (b) On ajoute les commandes suivantes sont l'exécution produit l'affichage ci-après. Détailler ce qu'elles font. Que peut-on conjecturer ? (On rappelle que la commande `np.arange(a,b,s)` crée une liste de valeurs entre a et b avec un pas de s .)

```

N=1000
for p in np.arange(0.1,1,0.2)
    [T,W]=sample_TW(p,N)
    r=covariance(T,W)/np.sqrt(covariance(T,T)*covariance(W,W))
    print(r)

```

```

>>>
0.5082364877696511
0.4924050605018343
0.49424137980025185
0.5048354509961391
0.5350220088999194

```

8. (a) Montrer que $\text{cov}(T, W) = V(X_2)$. Les variables aléatoires T et W sont-elles indépendantes ?
 (b) Montrer que $V(T) = V(W) = 2V(X_2)$ puis calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(T, W)$ des variables aléatoires T et W .
 Votre conjecture de la Question 7 b est-elle vérifiée ?

Partie 3 : Loi du maximum

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{BN}(1, p)$.

On pose : $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

9. Montrer que la loi du couple (U, V) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([U = i] \cap [V = j]) = \begin{cases} 2p^2q^{i+j}, & \text{si } i > j \\ 0, & \text{si } i < j \\ p^2q^{2i}, & \text{si } i = j \end{cases}$$

10. (a) Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N}, P([V = j]) = \sum_{i=j}^{+\infty} P([U = i] \cap [V = j])$.
 (b) En déduire que : $\forall j \in \mathbb{N}, P([V = j]) = p(1+q)q^{2j}$.
 (c) En déduire que V suit la loi $\mathcal{BN}(1, (1-q^2))$.
 (d) En déduire que V admet une espérance et que $E(V) = \frac{q^2}{1-q^2}$.
11. (a) Justifier que $U + V = X + Y$.
 (b) En déduire que U admet une espérance et expliquer (sans faire les calculs) comment on pourrait obtenir sa valeur.

Partie 4 : Partie entière d'une variable à densité

Soient S_1 et S_2 deux variables aléatoires indépendantes à densité, et suivant toutes les deux la même loi, de densité commune définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \lambda > 0$$

On pose $T_1 = \lfloor S_1 \rfloor$ la partie entière de S_1 et $T_2 = \lfloor S_2 \rfloor$ la partie entière de S_2 . On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (T_1 = k) = (k \leq S_1 < k+1) \quad \text{et} \quad (T_2 = k) = (k \leq S_2 < k+1)$$

12. (a) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
 (b) Montrer que f est bien une densité de probabilité.
13. (a) Montrer que la fonction de répartition de S_1 a pour expression $F_{S_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
 (b) Calculer $P(T_1 = k)$, pour $k \in \mathbb{N}$, et en déduire que T_1 suit la loi $\mathcal{BN}(1, p_\lambda)$ où $p_\lambda = 1 - e^{-\lambda}$. On remarquera que T_2 suit la même loi que T_1 .
14. (a) Justifier que T_1 et T_2 sont indépendantes.
 (b) On note $q_\lambda = 1 - p_\lambda$. Montrer que : $P(T_1 = T_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_\lambda^2 q_\lambda^{2k}$.
 (c) Calculer alors $P(T_1 = T_2)$ en fonction de p_λ et q_λ puis vérifier que $P(T_1 = T_2) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}}$.

Problème 2

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$, noté $\text{Card}(\{a, b, c\})$, le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.

Par exemple, si $a = b = c$, alors $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 1$; si $a = b$ et $a \neq c$, alors $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 2$.

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite démontrer la propriété (*) suivante :

$$(*) \quad M(a, b, c) \text{ est inversible} \Leftrightarrow ab + bc + ac + abc \neq 0$$

Partie A : Généralités

1. Justifier que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
 (a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ ne peut pas admettre une unique valeur propre.
On pourra par exemple raisonner par l'absurde.
 (b) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.
3. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M(a, b, c)$.
 (a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.
 (b) En déduire que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(b, a, c)$ ont les mêmes valeurs propres.
 (c) De la même façon, montrer que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(a, c, b)$ ont les mêmes valeurs propres.

Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a, b, c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a, b, c) .

Partie B : Cas où $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 1$

4. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(0, 0, 0)$.
- (a) Calculer J^2 . Déterminer alors un polynôme annulateur de J .
 - (b) En déduire les valeurs propres de J et préciser une base des sous-espaces propres de J .
 - (c) Déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $J = PDP^{-1}$.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$.
- (a) Vérifier : $M(a, a, a) = P(aI_3 + D)P^{-1}$.
 - (b) En déduire que la matrice $M(a, a, a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a .
 - (c) Vérifier la propriété (*) pour la matrice $M(a, a, a)$.

Partie C : Cas où $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 2$

6. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$.
On note $C = M(0, 0, c)$.

- (a) Justifier que 0 est une valeur propre de C .
- (b) Soit λ un réel non nul.

i. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$CX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = (\lambda - 2)x \\ (\lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c)x = 0 \end{cases}$$

ii. En déduire : λ est une valeur propre de $C \Leftrightarrow \lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c = 0$.

- (c) Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.
7. Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.
- (a) Exprimer $M(a, a, c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0, 0, c - a)$.
 - (b) En déduire que la matrice $M(a, a, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.
 - (c) Vérifier la propriété (*) pour la matrice $M(a, a, c)$.
8. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 2$.
À l'aide de la conclusion de la question 3., montrer que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété (*) dans ce cas.

Partie D : Cas où $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 3$

9. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$.
On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$ par :

$$\forall x \in D, \quad g(x) = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$$

- (a) Dresser le tableau de variations de g sur D en y précisant les limites en $+\infty$, en $-\infty$, ainsi qu'à gauche et à droite de a , de b et de c .
- (b) En déduire que l'équation $g(x) = 1$, d'inconnue $x \in D$, admet exactement trois solutions distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, vérifiant : $a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.

(c) Soit $\lambda \in D$ une solution de l'équation $g(x) = 1$.

On note X_λ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par : $X_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - a} \\ \frac{1}{\lambda - b} \\ \frac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix}$.

Montrer que X_λ est un vecteur propre de la matrice $M(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ .

(d) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

10. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 3$.

(a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

(b) Vérifier la propriété (*) pour la matrice $M(a, b, c)$.

11. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que la matrice A est inversible.

(b) On note α la plus grande valeur propre de A .

i. Montrer : $4 < \alpha < 5$.

ii. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```
def valeur_approchée():
    x=4
    y=5
    while ... :
        m=(x+y)/2
        if 1/m+1/(m-1)+1/(m-2) ... :
            ...
        else :
            ...
    alpha=(x+y)/2
    return(alpha)
```