HEC 2022 voie E

Proposition de corrigé par David Meneu
Lycée Champollion - Grenoble, pour
Major-Prépa

Partie 1 - Intensité de défaut

1. On suppose dans cette question que f_T est continue sur $\mathbb{R}^+$.

a) L'énoncé précise bien dans le préambule, que la densité f_t est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et on vient de supposer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par stricte positivité de l'intégrale, on peut donc dire que pour tout réel positif t, la probabilité $\mathbb{P}(T > t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} f_T(t)\mathrm{d}t > 0$ (cette intégrale converge puisque f_T est une densité de probabilité).
b) On pose, pour tout $h > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$: $K_{T,t}(h) = \mathbb{P}_{[T>t]}(T \leqslant t+h)$.
Par définition de la probabilité conditionnelle :
$K_{T,t}(h) = \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{\mathbb{P}([T>t] \cap [T \leqslant t+h])}{\mathbb{P}(T>t)} = \dfrac{\mathbb{P}(t < t \leqslant t+h)}{h} \cdot \dfrac{1}{\mathbb{P}(T>t)} = \dfrac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h} \cdot \dfrac{1}{1-F_T(t)}$.
On sait que la fonction F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, où sa dérivée est la fonction f_T. La première fraction étant le taux d'accroissement de F_T au point t, et la deuxième ne dépendant pas de t, la limite de cette expression quand h tend vers 0^+existe et vaut :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h} \cdot \frac{1}{1-F_T(t)} = F_T'(t) \cdot \frac{1}{1-F_T(t)} = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}$$

L'énoncé notait alors $\gamma_T(t)$ le quotient $\dfrac{f_T(t)}{1-F_T(t)}$.
c) Comme $f_T(t) = F_T'(t)$, le quotient $\dfrac{f_T(t)}{1-F_T(t)}$ apparaît, à un facteur (-1) près, comme un quotient $\dfrac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln(|u|)$; la fonction γ_T est continue sur $\mathbb{R}_+$comme quotient de fonction qui le sont, donc:

$$\forall t \geqslant 0, \quad \int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x = \left[-\ln\left(|1-F_T(t)|\right)\right]_0^t = -\ln\left(1-F_T(t)\right) + \ln(1) = -\ln\left(1-F_T(t)\right)$$

puisque $F_T(t) < 1$ et $F_T(0) = 0$, vu que T est une variable aléatoire à valeurs strictement positives. Dans l'égalité obtenue, on isole alors $F_T(t)$:

$$\begin{aligned}\int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x = -\ln\left(1-F_T(t)\right) &\iff \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x\right) = 1 - F_T(t) \\ &\iff F_T(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

En reprenant le principe utilisé pour démarrer la question b), on peut aussi écrire, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\theta \geqslant t$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[T>t]}(T \leqslant \theta) &= \frac{\mathbb{P}(t < T \leqslant \theta)}{\mathbb{P}(T>t)} = \frac{F_T(\theta) - F_T(t)}{1-F_T(t)} \\ &= \frac{1 - \exp\left(-\int_0^\theta \gamma_T(x)\mathrm{d}x\right) - 1 + \exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x\right)}{\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x\right)} \\ &= 1 - \frac{\exp\left(-\int_0^\theta \gamma_T(x)\mathrm{d}x\right)}{\exp\left(-\int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x\right)} = 1 - \exp\left(-\int_0^\theta \gamma_T(x)\mathrm{d}x + \int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\int_t^\theta \gamma_T(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

2. On repart de la relation : $\forall t \geqslant 0, \displaystyle\int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x = -\ln\left(1-F_T(t)\right)$.

Puisque F_T est une fonction de répartition, on sait que $\lim_{t\to+\infty} F_T(t)=1^-$, donc $\lim_{t\to+\infty} 1-F_T(t)=0^+$ et $\lim_{t\to+\infty} -\ln(1-F_T(t)) = +\infty = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \gamma_T(x)\mathrm{d}x$.

On a donc prouvé que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\gamma_T(x)\mathrm{d}x$ est divergente.

On a déjà montré en 1.a) que : $\forall t>0, \mathbb{P}(T>t)>0 \iff 1-F_T(t)>0 \iff F_T(t)<1$; de la même manière, puisque f_T est nulle sur $]-\infty;0[$ et strictement positive et continue sauf en un nombre fini de points : pour tout $t>0, F_T(t)=\int_0^t f_T(x)\mathrm{d}x>0$ par stricte postivité de l'intégrale, donc pour tout $t>0, F_T(t)\in]0;1[$.

3. Question d'interprétation graphique : si on note respectivement γ_U,γ_V et γ_W les intensités de défaut des trois firmes étudiées : au vu des courbes tracées, il est assez clair que :

$$\begin{aligned}&\int_0^1\gamma_V(x)\mathrm{d}x<\int_0^1\gamma_U(x)\mathrm{d}x<\int_0^1\gamma_W(x)\mathrm{d}x \iff -\int_0^1\gamma_V(x)\mathrm{d}x>-\int_0^1\gamma_U(x)\mathrm{d}x>-\int_0^1\gamma_W(x)\mathrm{d}x\\ &\iff \exp\left(-\int_0^1\gamma_V(x)\mathrm{d}x\right)>\exp\left(-\int_0^1\gamma_U(x)\mathrm{d}x\right)>\exp\left(-\int_0^1\gamma_W(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\iff 1-\exp\left(-\int_0^1\gamma_V(x)\mathrm{d}x\right)<1-\exp\left(-\int_0^1\gamma_U(x)\mathrm{d}x\right)<1-\exp\left(-\int_0^1\gamma_W(x)\mathrm{d}x\right)\\ &\iff F_V(1)<F_U(1)<F_W(1)\end{aligned}$$

Ce qui signifie que c'est la firme W qui a la plus faible probabilité de défaut à échéance d'une année.

La deuxième interprétation graphique consiste à comparer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{[T>0.75]}(T\leqslant 1)=1-\exp\left(-\int_{0.75}^1\gamma_T(x)\mathrm{d}x\right)$ des trois firmes :

Cette fois, on peut plutôt lire :

$$\int_{0.75}^1\gamma_W(x)\mathrm{d}x<\int_{0.75}^1\gamma_U(x)\mathrm{d}x<\int_{0.75}^1\gamma_V(x)\mathrm{d}x$$

$$\iff 1-\exp\left(-\int_0^1\gamma_W(x)\mathrm{d}x\right)<1-\exp\left(-\int_0^1\gamma_U(x)\mathrm{d}x\right)1-\exp\left(-\int_0^1\gamma_V(x)\mathrm{d}x\right)$$

ce qui signifie que si au bout de 9 mois aucune des trois organisations n'a fait défaut, c'est le firme W qui a la plus faible probabilité de faire défaut à l'échéance des trois mois suivants.

4. On suppose dans cette question que γ_T est constante de valeur λ. La relation (1) obtenue à la question 1.c) se réécrit alors :

$$\forall t\geqslant 0,\quad F_T(t)=1-\exp\left(-\int_0^t\lambda\mathrm{d}x\right)=1-\exp(-\lambda t)$$

Sachant que $F_T(t)=0$ pour tout $t<0$, on reconnaît alors la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ, loi que suit donc T (dans la question précédente, c'était le cas de l'organisation U avec $\lambda=0.5$). On retrouve ici la propriété de cours selon laquelle la loi exponentielle est sans mémoire: l'intensité de défaut ne change pas en fonction de ce qui s'est passé précédemment, elle reste invariante. On rappelle alors, toujours d'après le cours, que $\mathbb{E}(T)=\frac{1}{\lambda}$.

5. On suppose dans cette question que pour tout $t\geqslant 0, \gamma_T(t)=\lambda t$, où λ est un réel strictement positif fixé.

a) On a toujours $F_T(t)=0$ pour tout $t<0$, et pour tout $t>0$:

$$F_T(t)=1-\exp\left(-\int_0^t\lambda x\ \mathrm{d}x\right)=1-\exp\left(-\lambda\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t\right)=1-e^{-\lambda\frac{t^2}{2}}$$

La fonction F_T est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0 , et une densité f_T de T est définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f_T(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leqslant 0\\ \lambda t e^{-\lambda\frac{t^2}{2}} & \text{si } t>0\end{cases}.$$

b) La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)\mathrm{d}t$, est absolument convergente.

Comme la fonction $t \mapsto t f_T(t)$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$(car f_T l'est), et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, cela revient à prouver la convergence simple de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_T(t) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$.
La fonction $t \mapsto \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$, donc $\displaystyle\int_0^1 \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) dt$ est bien définie et est un réel.
Pour tout $t \geqslant 1$: $t^3 f_T(t) = \lambda t^4 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \underset{t\to+\infty}{} 0$ par croissances comparées (et du fait que $\lambda > 0$), donc $t f_T(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ converge comme intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$: le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t f_T(t) \mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_T(t) \mathrm{d}t$ aussi, c'est-à-dire que T admet bien une espérance donnée par l'intégrale de l'énoncé de cette question.
c) On sait qu'une densité de la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ est la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$.
Pour que le contenu de l'exponentielle corresponde à celle de la question précédente, on cherche donc σ tel que :

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2} \Longleftrightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Avec cet écart-type, la variable aléatoire normale correspondante - notons-la Y - a pour espérance 0 , pour variance $\frac{1}{\lambda}$ et pour moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \mathbb{V}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{1}{\lambda}$$

d'après la formule de Koenig-Huygens. On peut donc écrire, d'après le théorème de transfert pour $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\lambda} t^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

Or la fonction $t \mapsto \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right)$ est clairement paire sur $\mathbb{R}$, donc puisque toutes les intégrales impropres concernées convergent, on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \lambda t^2 \exp\left(-\lambda \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \Longleftrightarrow \mathbb{E}(T) = \sqrt{\frac{2\pi}{4\lambda}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$$

6. On suppose dans cette question que a est un entier, $a \geqslant 2$ et que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, a\}, \forall t \in [i-1, i[, \gamma_T(t) = \gamma_i$$

Cela signifie donc que γ_T est une fonction en escalier :
a) La relation de Chasles permet d'écrire, pour tout $i \in \{1, \ldots, a\}$ et tout $t \in [i-1, i[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \gamma_T(x) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \gamma_T(x) \mathrm{d}x + \int_1^2 \gamma_T(x) \mathrm{d}x + \cdots + \int_{i-2}^{i-1} \gamma_T(x) \mathrm{d}x + \int_{i-1}^t \gamma_T(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \gamma_1 \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \gamma_2 \, \mathrm{d}x + \cdots + \int_{i-2}^{i-1} \gamma_{i-1} \, \mathrm{d}x + \int_{i-1}^t \gamma_i \, \mathrm{d}x \quad \text{on intègre des constantes!} \\
&= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{i-1} + \gamma_i(t - (i-1))
\end{aligned}$$

On a sommé des aires de rectangles de largeur 1 , sauf le dernier qui est de largeur $t - (i-1)$.
On a alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, a\}$ et tout $t \in [i-1; i[$: :
$F_T(t) = 1 - \exp\left(-\displaystyle\int_0^t \gamma_T(x) \mathrm{d}x\right) = 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k - \gamma_i(t-(i-1))\right) = 1 - \exp\left(-\gamma_i(t-(i-1))\right) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k\right)$.
b) Pour tout réel $t \in [0, a[$, il existe un unique entier $i \in \{1, \ldots, a\}$ tel que $t \in [i-1, i[$: par définition de la partie entière, c'est l'unique entier tel que $i - 1 = \lfloor t \rfloor \Longleftrightarrow i = \lfloor t \rfloor + 1$.
Il suffit alors de reprendre la formule précédente avec cette valeur de i, et on obtient bien :

$$\forall t \in \left[0, a\right[, \quad F_T(t) = 1 - \exp\left(-\gamma_{\lfloor t \rfloor + 1}(t - \lfloor t \rfloor)\right) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \gamma_k\right)$$

Partie 2 - Modélisation du prix du CDS

7. a) Des données de l'énoncé qui introduit cette partie, on retient les informations suivantes qui concernent le capital U que B verse à A :

- D'abord, B ne verse quelque chose à A que si un défaut de paiement se produit avant l'instant m, d'où le facteur $\mathbf{1}_{[T \leqslant m]}$ qui vaut 1 si cet événement se produit, et 0 sinon.
- On sait que T représentant l'instant aléatoire de défaut de paiement, A reçoit $(1-\delta(T))$ euro de B par euro investi dans l'organisation C, et ce à l'instant T.
- Cette somme $(1-\delta(T))$ reçue de B à l'instant T, est alors immédiatement placée par A sur l'actif non risqué jusqu'à maturité, donc pendant un temps égal à $(m-T)$, ce qui rapporte $e^{r(m-T)}$ euros par euro placé.

À maturité, ce capital, s'il est versé, vaut donc $(1-\delta(T)) \cdot e^{r(m-T)}$.
On a donc bien justifié que :

$$U = (1-\delta(T))e^{r(m-T)}\mathbf{1}_{[T \leqslant m]} = (1-\delta(T))e^{r(m-T)}\mathbf{1}_{]0,m]}(T)$$

En effet, puisque T est à valeurs strictement positives : $\quad (T \leqslant m) \Longleftrightarrow T \in]0, m]$.
b) La fonction $G : t \mapsto (1-\delta(t))e^{r(m-t)}\mathbf{1}_{[0,m]}(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$(car δ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de même que $t \mapsto e^{r(m-t)}$, tandis que $\mathbf{1}_{[0,m]}$ est une fonction en escaliers continue par morceaux).
D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire U qui est égale à la composée $G(T)$, admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(t) f_T(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
Comme G est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$et nulle en-dehors de $]0, m]$, la convergence simple et la convergence absolue de l'intégrale sont confondues et assurées, de sorte que U admet une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^m (1-\delta(t))e^{r(m-t)} f_T(t)\mathrm{d}t = e^{rm}\int_0^m (1-\delta(t))e^{-rt} f_T(t)\mathrm{d}t$$

8. a) Au prix de s euros par an, sur m années, le montant total de la prime versée à B est égal à ms; cette prime est versée en N échéances toute identiques, les versements valent donc $\dfrac{sm}{N} = s\theta$ chacun.

b) Pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, si le défaut de paiement survient entre les $(i-1)$-ième et i-ième échéances : alors A a effectué le versement 1 de $s\theta$ euros à l'instant θ, qui immédiatement placé par B jusqu'à maturité, a rapporté in fine $e^{r(m-\theta)}$ euro par euro investi, donc $s\theta e^{r(m-\theta)}$ euros pour cette annuité; si $i \geqslant 2$, A a aussi effectué le deuxième versement de $s\theta$ euros à l'instant 2θ, qui immédiatement placé par B a rapporté $e^{r(m-2\theta)} \cdot s\theta$ euros in fine, et ainsi de suite jusqu'au i-ième versement à l'instant $i\theta$, toujours de $s\theta$ euros, qui rapporte $e^{r(m-i\theta)} \cdot s\theta$ euros à maturité.
Tous ces gains s'additionnent à la fin, et on y rajoute aussi l'argent que A verse à B pour la période $[i\theta, (i+1)\theta]$ interrompue : le temps écoulé dans cette période avant le défaut de paiement est égal à $T - i\theta$, A verse donc $s(T - i\theta)$ euros immédiatement placés pour un temps égal à $(m-T)$, et qui rapporte donc $e^{r(m-T)}$ euros par euro investi. Tous comptes faits, la valeur à maturité du capital que A aura versé à B si le défaut de paiment intervient entre les échéances $i\theta$ et $(i+1)\theta$ est bien donné par la formule :

$$\sum_{k=1}^{i} s\theta e^{r(m-k\theta)} + se^{r(m-T)}(T-i\theta) = s \cdot \left(\theta \sum_{k=1}^{i} e^{r(m-k\theta)} + e^{r(m-T)}(T-i\theta)\right)$$

Lorsque $[T \leqslant \theta]$ est réalisé : le défaut de paiement a lieu avant même le premier versement. Dans ce cas la règle énoncé stipule que A verse à B la somme de sT euros, qui sont investis par B pendant un temps égal à $m - T$, ce qui donne un capital final de $sTe^{r(m-T)}$ euros.
Si $[T > N\theta]$ est réalisé : cela signifie que le défaut de paiement a eu lieu après le passage de la maturité, puisque $N\theta = N \cdot \dfrac{m}{N} = m$.
Dans ce cas, A a effectué tous ses versements auprès de B, et le capital correspondant à maturité est donné par la formule :

$$\sum_{k=1}^{N} s\theta e^{r(m-k\theta)}$$

c) Dans la formule proposée par l'énoncé pour le capital V versé par A à B : si le défaut de paiment à lieu entre les échéances $i\theta$ et $(i+1)\theta$, alors dans la première somme d'indices strictement supérieurs à i sont nuls, et dans la deuxième un seul terme est non nul : celui d'indice $k = i$. Le capital a alors pour valeur :

$$s\left(\theta \sum_{k=1}^{i} e^{r(m-k\theta)} + e^{r(m-T)}(T-i\theta)\right)$$

ce qui correspond bien à ce qui a été obtenu à la question précédente.
Notons que la formule est encore vraie si $[T \leqslant \theta]$ est réalisé : dans ce cas tous les termes de la première somme sont nuls, et de la deuxième ne subsiste que le terme pour $k=0$. On obtient alors la valeur finale $sTe^{r(m-T)}$, qui est bien ce qui a été obtenu précédemment.
Si au contraire $[T > N\theta] = [T > m]$ est réalisé, alors on est arrivé à maturité sans connaître de défaut de paiement : dans ce cas subsistent de la formule proposée, tous les termes de la première somme, où les indicatrices valent toutes 1 , et il ne reste rien de la deuxième somme. Le capital final est donc $s\theta \sum_{k=1}^{N} e^{r(m-k\theta)}$, ce qui correspond bien à ce qui a été obtenu précédemment.
La formule finale pour le capital versé par A à B, est donc bien :

$$V = s\left(\theta \sum_{k=1}^{N} e^{r(m-k\theta)} \mathbf{1}_{[T>k\theta]} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{r(m-T)}(T-k\theta)\mathbf{1}_{[k\theta<T\leqslant(k+1)\theta]}\right)$$

ou encore :

$$V = se^{rm}\left(\theta \sum_{k=1}^{N} e^{-rk\theta} \mathbf{1}_{]k\theta,+\infty[}\left[(T) + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-rT}(T-k\theta)\mathbf{1}_{]k\theta(k+1)\theta]}\right)$$

puisque: $T > k\theta \in T \in [k\theta, +\infty[$ et $k\theta < T \leqslant (k+1)\theta \iff T \in]k\theta, (k+1)\theta]$.
d) À nouveau, V est une fonction $H(T)$ de la variable T, où H est positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$: toujours d'après le théorème de transfert, V admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} se^{rm}\left(\theta \sum_{k=1}^{N} e^{-rk\theta} \mathbf{1}_{]k\theta,+\infty[}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-rt}(t-k\theta)\mathbf{1}_{]k\theta(k+1)\theta]}\right) f_T(t)\mathrm{d}t$$

est (absolument) convergente. La linéarité de l'intégrale ramène le problème à l'étude de chacune des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rk\theta}\mathbf{1}_{]k\theta,+\infty[}(t) f_T(t)\mathrm{d}t = e^{-rk\theta}\int_{k\theta}^{+\infty} f_T(t)\mathrm{d}t$: ces intégrales convergent toutes puisque f_T est une densité de probabilité, et valent chacune $e^{-rk\theta}\mathbb{P}(T > k\theta) = e^{-rk\theta}\left(1 - F_T(k\theta)\right)$.
On doit aussi étudier $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rt}(t-k\theta)\mathbf{1}_{]k\theta,(k+1)\theta]}(t) f_T(t)\mathrm{d}t = \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt}(t-k\theta) f_T(t)\mathrm{d}t$:
il s'agit bien d'une intégrale convergente, puisqu'on intègre sur un segmet une fonction continue par morceaux.
Toutes les intégrales convergent, donc V admet une espérance qui vaut bien, par linéarité :

$$\mathbb{E}(V) = se^{rm}\left(\theta \sum_{k=1}^{N} e^{-rk\theta}\left(1 - F_T(k\theta)\right) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt}(t-k\theta) f_T(t)\mathrm{d}t\right)$$

9. Si on veut que la prime annuelle soit équitable pour A et B, il faut que $\mathbb{E}(U) = \mathbb{V}$: en moyenne, A verse à B autant qu'il reçoit en retour.

On a bien :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) \\
\iff & e^{rm}\int_0^m (1-\delta(t))e^{-rt} f_T(t)\mathrm{d}t = s \cdot e^{rmx}\left(\theta \sum_{k=1}^{N} e^{-rk\theta}\left(1 - F_T(k\theta)\right) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt}(t-k\theta) f_T(t)\mathrm{d}t\right) \\
\iff & s = \frac{\int_0^m (1-\delta(t))e^{-rt} f_T(t)\mathrm{d}t}{\theta \sum_{k=1}^{N} e^{-rk\theta}\left(1 - F_T(k\theta)\right) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt}(t-k\theta) f_T(t)\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

10. a) Une pure question de cours! Si g est une fonction continue sur le segment $[0, m]$, alors d'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{m}{N} \sum_{k=1}^{N} g\left(k\frac{m}{N}\right) = \int_0^m g(t)\mathrm{d}t$$

b) La fonction $g : t \mapsto e^{-rt}\left(1 - F_T(t)\right)$ est bien continue (car F_T et exp le sont) sur l'intervalle $[0, m]$, donc en application directe du théorème précédent :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{m}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-rk\frac{m}{N}}\left(1 - F_T\left(k\frac{m}{N}\right)\right) = \int_0^m e^{-rt}\left(1 - F_T(t)\right)\mathrm{d}t$$

c) Pour tout $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ et pour tout $t \in [k\theta, (k+1)\theta]$, en rappelant que $\theta = \frac{m}{N}$, on a :

$$-rt \leqslant 0 \text{ donc } 0 < e^{-rt} \leqslant 1 \text{ et } k\frac{m}{N} \leqslant t \leqslant (k+1)\frac{m}{N} \iff 0 \leqslant t - k\frac{m}{N} \leqslant \frac{m}{N},$$

donc par produit d'inégalités de même sens entre facteurs positifs :

$$0 \leqslant e^{-rt}\left(t - k\frac{m}{N}\right) \leqslant \text{fracm}\, N \iff 0 \leqslant e^{-rt}\left(t - k\frac{m}{N}\right) f_T(t) \leqslant \text{fracm}\, N f_T(t)$$

puisque la densité f_T est positive sur $\mathbb{R}_+$. Les fonction concernées sont continue (par morceaux) sur l'intervalle $[k\theta, (k+1)\theta]$, et $k\theta < (k+1)\theta$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt}\left(t - k\frac{m}{N}\right) f_T(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \frac{m}{N} f_T(t)\mathrm{d}t = \frac{m}{N}\int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t)\mathrm{d}t$$

Le passage à la somme dans ces inégalités quand k varie de 0 à $N-1$ donne alors :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt}(t - k\theta) f_T(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{m}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t)\mathrm{d}t$$

Grâce à la relation de Chasles, on peut réécrire le même de droite sous la forme :

$$\frac{m}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\theta}^{(k+1)\theta} f_T(t)\mathrm{d}t = \frac{m}{N}\int_0^{N\theta} f_T(t)\mathrm{d}t = \frac{m}{N}\int_0^{m} f_T(t)\mathrm{d}t = \frac{m}{N}\underbrace{\mathbb{P}(T \leqslant m)}_{\leqslant 1} \leqslant \frac{m}{N}$$

Puisque $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{m}{N} = 0$, le théorème d'encadrement assure bien que :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt}(t - k\theta) f_T(t)\mathrm{d}t = 0$$

En reprenant la formule (3) obtenue à la question 9., et grâce à 10.b) où $\frac{m}{N} = \theta$, on a bien :

$$\lim_{N \to +\infty} s_N = \lim_{N \to +\infty} \frac{\int_0^m (1-\delta(t))e^{-rt} f_T(t)\mathrm{d}t}{\theta \sum_{k=1}^{N} e^{-rk\theta}\left(1 - F_T(k\theta)\right) + \sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-rt}(t-k\theta) f_T(t)\mathrm{d}t} = \frac{\int_0^m (1-\delta(t))e^{-rt} f_T(t)\mathrm{d}t}{\int_0^m e^{-rt}\left(1 - F_T(t)\right)\mathrm{d}t}.$$

d) Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ et si δ est une fonction constante, alors :

$$\int_0^m (1-\delta(t))e^{-rt} f_T(t)\mathrm{d}t = (1-\delta)\int_0^m e^{-rt}\lambda e^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t = \lambda(1-\delta)\int_0^m e^{-(r+\lambda)t}\ \mathrm{d}t$$
$$\text{et } \int_0^m e^{-rt}\left(1 - F_T(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^m e^{-rt}\cdot e^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t = \int_0^m e^{-(r+\lambda)t}\ \mathrm{d}t$$

Et donc, sans avoir besoin de calculer explicitement cette intégrale qu'on retrouve deux fois et qu'on peut donc simplifier dans la fraction :

$$\lim_{N \to +\infty} s_N = \lambda(1-\delta).$$

Partie 3 - Cotation du CDS et intensité de défaut

11. D'après les hypothèses faites dans cette partie : pour tout $t \in [0;1[$,

$$\gamma_T(t) = \gamma_1 \iff \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} = \gamma_1 \iff f_T(t) = \gamma_1\left(1 - F_T(t)\right)$$

de sorte que : $s_1 = (1-\delta)\dfrac{\int_0^1 e^{-rt} f_T(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 e^{-rt}\left(1 - F_T(t)\right)\mathrm{d}t} = (1-\delta)\dfrac{\gamma_1\int_0^1 e^{-rt}\left(1 - F_T(t)\right)\mathrm{d}t}{\int_0^1 e^{-rt}\left(1 - F_T(t)\right)\mathrm{d}t}$,

donc : $\quad s_1 = (1-\delta)\gamma_1 \iff \gamma_1 = \dfrac{s_1}{1-\delta}$.

12. a) En reprenant la formule obtenue à la question 6.a), encore valide ici vues les hypothèses faites dans cette partie : pour tout $i \in \{1, \ldots, a\}$ et pour tout $t \in [i-1; i[$,

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= 1-\exp\left(-\gamma_i(t-(i-1))\right)\cdot\exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1}\gamma_k\right) = 1-\exp\left(-\gamma_i(t-(i-1))\right)\prod_{k=1}^{i-1}\exp\left(-\gamma_k\right)\\
&= 1-\exp\left(-\gamma_i(t-(i-1))\right)\cdot\prod_{k=1}^{i-1}\exp\left(-\alpha_k-r\right)\\
&= 1-\exp\left(-\gamma_i(t-(i-1))\right)\exp(-(i-1)r)\prod_{k=1}^{i-1}\frac{A_k}{A_{k-1}}\\
&= 1-\exp\left(-(\alpha_i-r)\cdot(t-(i-1))-(i-1)r\right)\frac{A_{i-1}}{A_0} = 1-A_{i-1}\exp\left(-\alpha_i(t-(i-1))+rt\right)\\
&= 1-A_{i-1}\exp\left(-\alpha_i(t-(i-1))\right)\cdot e^{rt}
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $e^{-rt}\left(1-F_T(t)\right) = A_{i-1}\exp\left(-\alpha_i(t-(i-1))\right)$.

b) De ce qui précède et de la définition de s_k, on déduit que pour tout $k\in\{1,\ldots,a\}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^k e^{-rt}f_T(t)\mathrm{d}t = \frac{s_k}{1-\delta}\int_0^k e^{-rt}\left(1-F_T(t)\right)\mathrm{d}t\\
\iff &\sum_{i=1}^k\int_{i-1}^i e^{-rt}\left(1-F_T(t)\right)\gamma_T(t)\mathrm{d}t = \frac{s_k}{1-\delta}\sum_{i=1}^k\int_{i-1}^i A_{i-1}\exp\left(-\alpha_i(t-(i-1))\right)\\
\iff &\sum_{i=1}^k\int_{i-1}^i A_{i-1}\exp\left(-\alpha_i(t-(i-1))\right)\gamma_i\,\mathrm{d}t = \frac{s_k}{1-\delta}\sum_{i=1}^k\int_{i-1}^i A_{i-1}\exp\left(-\alpha_i(t-(i-1))\right)\\
\iff &\sum_{i=1}^k A_{i-1}\left(\frac{s_k}{1-\delta}-\gamma_i\right)\int_{i-1}^i\exp\left(-\alpha_i(t-(i-1))\right)\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

- On pose, pour $k\in\{1,\ldots,a\}, w_k = r+\dfrac{s_k}{1-\delta}$ et $\theta_k = \dfrac{1}{w_k}$.

c) Pour tout entier $i\in\{1,\ldots,a\}$:

$$\int_{i-1}^i\exp\left(-\alpha_i(t-(i-1))\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\alpha_i}\exp\left(-\alpha_i(t-(i-1))\right)\right]_{i-1}^i = \frac{-\exp\left(-\alpha_i\right)+1}{\alpha_i},$$

donc la relation finale obtenue à la question précédente se réécrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k\left(\frac{s_k}{1-\delta}-\gamma_i\right)\cdot\frac{A_{i-1}-A_{i-1}\exp\left(-\alpha_i\right)}{\alpha_i} = 0 &\iff \sum_{i=1}^k\left(w_k-r-\gamma_i\right)\cdot\frac{A_{i-1}-A_i}{\alpha_i} = 0\\
&\iff \sum_{i=1}^k\left(w_k-\alpha_i\right)\cdot\frac{A_{i-1}-A_i}{\alpha_i} = 0.
\end{aligned}$$

En séparant en deux la somme par développement du premier facteur de son terme général, on remarque alors que cette dernière relation se réécrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k w_k\frac{A_{i-1}-A_i}{\alpha_i}-\sum_{i=1}^k\left(A_{i-1}-A_i\right) = 0 &\iff w_k\sum_{i=1}^k\frac{A_{i-1}-A_i}{\alpha_i}-\left(A_0-A_k\right) = 0\\
&\iff \sum_{i=1}^k\frac{A_{i-1}-A_i}{\alpha_i} = \frac{1-A_k}{w_k}
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien, puisque $\theta_k = \dfrac{1}{w_k}$: $\quad\theta_k\left(1-A_k\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^k\frac{A_{i-1}-A_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^k A_{i-1}\cdot\frac{1-\exp\left(-\alpha_i\right)}{\alpha_i}$ puisque $A_i = A_{i-1}\exp\left(-\alpha_i\right)$.

d) En utilisant la relation : $A_k = A_{k-1}\exp\left(-\alpha_k\right)$ dans le membre de gauche de l'égalité précédente, et en isolant le dernier terme de la somme du membre de droite, on obtient finalement, pour tout $k\in\{2,\ldots,a\}$:

$$\theta_k\left(1-A_{k-1}e^{-\alpha_k}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1}A_{i-1}\frac{1-e^{-\alpha_i}}{\alpha_i}}_{=\theta_{k-1}\left(1-A_{k-1}\right)}+A_{k-1}\frac{1-e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} \iff \theta_k\left(1-A_{k-1}e^{-\alpha_k}\right)-A_{k-1}\frac{1-e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_{k-1}\left(1-A_{k-1}\right)$$

13. Si pour un $k \in \{2, \ldots, a\}$, $s_{k-1} = s_k$, alors pour ce même k :

$$r + \frac{s_k}{1-\delta} = r + \frac{s_{k-1}}{1-\delta} \Longleftrightarrow w_k = w_{k-1} \Longleftrightarrow \frac{1}{w_k} = \frac{1}{w_{k-1}} \Longleftrightarrow \theta_k = \theta_{k-1}$$

de sorte que la relation de la question précédente se réécrit:

$$\theta_k \left(1 - A_{k-1}e^{-\alpha_k}\right) - A_{k-1}\frac{1-e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_k \left(1 - A_{k-1}\right) \Longleftrightarrow \theta_k \cdot A_{k-1}\left(1 - e^{-\alpha_k}\right) = A_{k-1}\frac{1-e^{-\alpha_k}}{\alpha_k}$$

Puisque A_{k-1} est un produit d'exponentielles, et puisque $\alpha_k = r + \gamma_k$ est strictement positif, alors $e^{-\alpha_k} < 1 \Longleftrightarrow 1 - e^{-\alpha_k} > 0$ donc on peut simplifier l'égalité précédente par les facteurs communs A_{k-1} et $1 - e^{-\alpha_k}$, ce qui donne:

$$\theta_k = \frac{1}{\alpha_k} \Longleftrightarrow w_k = \alpha_k \Longleftrightarrow r + \frac{1}{1-\delta} = r + \gamma_k \Longleftrightarrow \gamma_k = \frac{s_k}{1-\delta}$$

- On définit, pour tout $k \in \{1, \ldots, a\}$, la fonction φ_k sur $]0; +\infty[$ par :

$$\varphi_k(t) = \theta_k \left(1 - A_{k-1}e^{-t}\right) - A_{k-1} \cdot \frac{1-e^{-t}}{t}$$

14. a) La fonction φ_k est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient et somme de fonctions de référence qui le sont, avec :

$$\begin{aligned}\forall t \in]0; +\infty[, \quad \varphi_k'(t) &= \theta_k \cdot A_{k-1}e^{-t} - A_{k-1} \cdot \frac{e^{-t} \cdot t - \left(1-e^{-t}\right) \cdot 1}{t^2} = \frac{A_{k-1}}{t^2} \cdot \left(t^2\theta_k e^{-t} - te^{-t} + 1 - e^{-t}\right) \\ &= \frac{A_{k-1}}{t^2} \cdot \left(\left(\theta_k t^2 - t - 1\right) \cdot e^{-t} + 1\right), \quad CQFD\end{aligned}$$

b) La fonction $h : t \mapsto 1 - (t+1)e^{-t}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$, avec :

$$\forall t \in \left[0; +\infty\right[, \quad h'(t) = 0 - \left(1 \cdot e^{-t} + (t+1) \cdot \left(-e^{-t}\right)\right) = te - t > 0$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$, et comme $h(0) = 1 - e^0 = 0$, alors on peut écrire que :

$$\forall t \in]0; +\infty\left[, \quad h(t) > 0 \Longleftrightarrow 1 - (t+1)e^{-t} > 0\right.$$

En remarquant alors que : $\forall t \in]0; +\infty \left[, \varphi_k'(t) = \frac{A_{k-1}}{t^2} \cdot \left(\theta_k t^2 + h(t)\right)\right.$, où A_{k-1} et θ_k sont des paramètres strictement positifs, on en déduit que $\varphi_k'(t) > 0$ pour tout $t > 0$, donc que φ_k est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. c) Limite en 0^+ : $\lim\limits_{t \to 0^+} e^{-t} = e^0 = 1$ par continuité de l'exponentielle en zéro.

D'autre part, l'équivalent classique $e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$ donne, puisque $\lim\limits_{t \to 0}(-t) = 0$:

$e^{-t} - 1 \underset{t \to 0}{\sim} -t \Longleftrightarrow 1 - e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t$, donc $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$, de sorte que :

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi_k(t) = \theta_k \left(1 - A_{k-1}\right) - A_{k-1}.$$

Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to 0} 1 - e^{-t} = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} = 0$, de sorte que par opérations sur les limites :

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_k(t) = \theta_k$$

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
φ_k	$\theta_k \left(1 - A_{k-1}\right) - A_{k-1}$ $\quad \to$

15. a) L'énoncé disait en préambule de la partie 3 , que $s_{k-1} \leqslant s_k$ pour tout $k \in \{2, \ldots, a\}$, donc puisque $r > 0$ et $0 \leqslant \delta < 1 \Longrightarrow 1 - \delta > 0$:

$$r + \frac{s_{k-1}}{1-\delta} \leqslant r + \frac{s_k}{1-\delta} \Longleftrightarrow w_{k-1} \leqslant w_k \Longleftrightarrow \frac{1}{w_{k-1}} \geqslant \frac{1}{w_k} \Longleftrightarrow \theta_{k-1} \geqslant \theta_k$$

On a alors :

$\varphi_k\left(w_k\right) = \theta_k \left(1 - A_{k-1}e^{-w_k}\right) - A_{k-1}\frac{1-e^{-w_k}}{w_k} = \theta_k \left(1 - A_{k-1}e^{-w_k} - A_{k-1}\left(1 - e^{-w_k}\right)\right) = \theta_k \left(1 - A_{k-1}\right),$

donc on a bien : $\varphi_k(w_k) \leqslant \theta_{k-1}(1-A_{k-1})$ puisque $0 < A_{k-1} < 1 \Longrightarrow 1 - A_{k-1} > 0$.
b) Il suffit de remplacer t par α_k dans l'expression de φ_k pour obtenir le membre de gauche de l'égalité démontrée en 12.d) : pour tout $k \in \{2, \ldots, a\}$,

$$\varphi_k(\alpha_k) = \theta_k\left(1 - A_{k-1}e^{-\alpha_k}\right) - A_{k-1}\frac{1-e^{-\alpha_k}}{\alpha_k} = \theta_{k-1}(1-A_{k-1})$$

Or comme on l'a vu dans le tableau de la fonction φ_k, strictement croissante sur $]0;+\infty[$: sa limite en $+\infty$ vaut θ_k et est par conséquent un majorant strict de la fonction sur tout son domaine : $\forall t \in]0;+\infty[, \varphi_k(t) < \theta_k$. En particulier : pour tout $k \in \{2, \ldots, a\}$,

$$\varphi(\alpha_k) < \theta_k \Longleftrightarrow \theta_{k-1}(1-A_{k-1}) < \theta_k$$

Au vu du résultat de 15.a), on remarque aussi que :

$$\varphi_k(w_k) \leqslant \varphi_k(\alpha_k) \Longleftrightarrow w_k \leqslant \alpha_k \Longleftrightarrow r + \frac{s_k}{1-\delta} \leqslant r + \gamma_k \Longleftrightarrow \frac{s_k}{1-\delta} \leqslant \gamma_k$$

La première équivalence a été obtenue grâce à la stricte croissance de φ_k sur $]0;+\infty[$ (les antécédents par φ_k sont rangés dans le même ordre que les images). c) Réciproquement, pour tout $k \in \{2, \ldots, a\}$, δ et r étant donnés : si on a déterminé $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ alors $A_{k-1} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{k-1}(r+\gamma_i)\right)$ est connu et strictement positif : on a toujours $\theta_k(1-A_{k-1}) - A_{k-1} \leqslant \theta_{k-1}(1-A_{k-1}) < \theta_{k-1}(1-A_{k-1})$, donc la condition $\theta_k > \theta_{k-1}(1-A_{k-1})$ suffit pour affirmer que $\theta_{k-1}(1-A_{k-1})$ appartient à l'intervalle-image $\varphi_k(]0;+\infty[)$, où φ_k est strictement croissante et continue sur $]0;+\infty[$, et dont l'expression ne dépend que de paramètres connus : le théorème de la bijection assure alors que α_k est bien défini comme unique antécédent de $\theta_{k-1}(1-A_{k-1})$ par φ_k.
Ainsi $\alpha_k = r + \gamma_k$ est uniquement déterminé : il en est donc de même de $\gamma_k = \alpha_k - r$.

16. a) Avec l'approximation de e^{-t} par $1-t$ pour obtenir la relation (4), le réel γ_k est "contenu" dans le terme $\alpha_k = r + \gamma_k$, qu'on cherche donc à isoler :

$\theta_k(1 - A_{k-1}(1-\alpha_k)) - A_{k-1} = \theta_{k-1}(1-A_{k-1}) \Longleftrightarrow 1 - A_{k-1}(1-\alpha_k) = \dfrac{\theta_{k-1}(1-A_{k-1}) + A_{k-1}}{\theta_k}$ soit :

Soit : $\gamma_k = \dfrac{(1-A_{k-1})(\theta_k - \theta_{k-1}) + A_{k-1}}{A_{k-1}\theta_k} - r$.

⋆ ⋆ FIN DU SUJET ⋆ ⋆