EML 2020

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\,\big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big)$$

2. ***a)*** Justifier : $\forall t \in]0,1[,\ t\,\ln(t) < 0$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

3. ***a)*** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

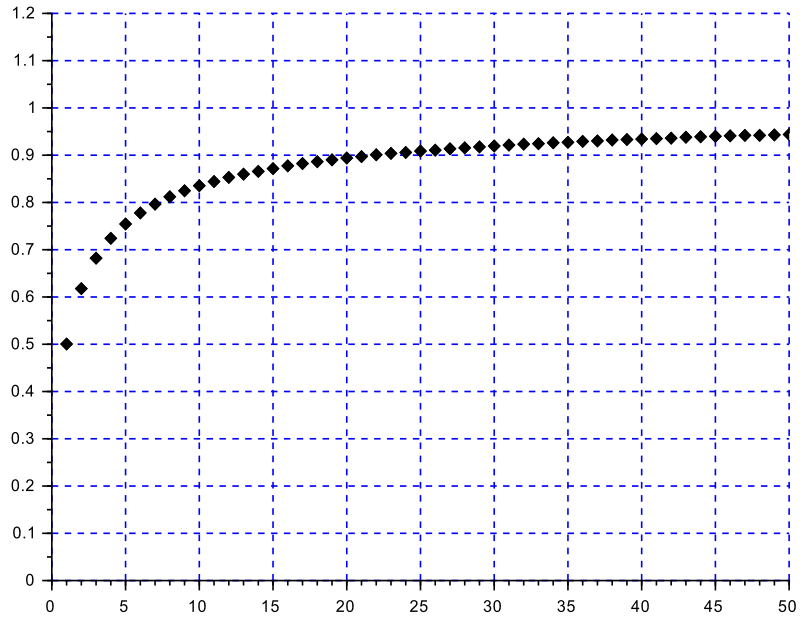
8. Déterminer u_1 et u_2.

9. ***a)*** Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n):
    a=0
    b=1
    while ...
            c=(a+b)/2
            if (c**n+c-1)>0:
                    ...
            else :
```

```
                    ...
            u = ...
    return(u)
```

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. ***a)*** Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ définie par :

$$F : (x,y) \mapsto x^2\,y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x$$

11. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

b) Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E_3) définie sans la partie **B**.

12. ***a)*** Écrire la matrice hessienne, notée H, de la fonction F au point (u_3, u_3^2).

b) Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\lambda_1\,\lambda_2 \;=\; -6u_3^2 - 2$$

13. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0,+\infty[^2$?

Exercice 2

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \left\{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. ***a)*** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
   Déterminer une base de E et sa dimension.

   b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**
   Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**
   Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

   a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

   b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

   c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.**
   Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

   a) Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

   b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

   c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$.

On pose :

$$v_1 = (1,1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.

d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer :

$$X \text{ est un vecteur propre de } N \text{ associé à la valeur propre } \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } \lambda \\ \text{et} \\ z = t = 0 \end{cases}$$

e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1,1)$ est diagonalisable.

f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,-1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1,-1)$ est-elle diagonalisable ?

g) Montrer l'équivalence :

$$M(a,b) \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \; a^2 + 10\,ab + b^2 > 0$$

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > b \\ a\,\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Montrer que la variable aléatoire $bU^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

b) En déduire une fonction Python d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

c) On considère la fonction Python ci-dessous.
Que contient la liste `L` renvoyée par la fonction `mystere` ?

```
def mystere(a,b):
    L=[]
    for p in range(2,7):
            S=0
            for k in range(10**p):
                    S=S+pareto(a,b)
            L=L.append(S/(10**p))
    return(L)
```

d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b.
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
--> mystere(2,1)
   ans =
       1.9306917   1.9411352   1.9840089   1.9977684   2.0012415
--> mystere(3,2)
   ans =
       3.1050951   3.0142956   2.9849407   2.9931656   2.9991517
--> mystere(1,4)
   ans =
       21.053151   249.58609   51.230522   137.64549   40.243918
```

4. a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a\,b}{a-1}$$

b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{a\,b^2}{(a-1)^2\,(a-2)}$$

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on chercher à déterminer un estimateur performant de b.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \dfrac{3\,b^3}{x^4} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.
On définit :

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

5. ***a)*** Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $\mathbb{P}([Y_n > x])$.

b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

c) Montrer que $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n$ est un estimateur sans biais de b.

Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

6. ***a)*** Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

b) En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme $\alpha\, Z_n$ où α est un réel à préciser.
Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

7. Entre Y'_n et Z'_n, quel estimateur choisir ? Justifier.

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance et la variance de W_n.

9. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sqrt{n}\,(a\, M_n - 1)$$

a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

b) En déduire que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n}\ ;\ \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
On admettra que $\Phi(2) \geqslant 0,975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.