Fonction génératrice des probabilités

On prendra comme convention : $0^0 = 1$.
Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires définies sur cet espace.

I. Cas discret fini à valeurs entières

Définition 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $X(\Omega) \subset [\![0; n]\!]$.
La fonction génératrice des probabilités de X, notée G_X, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \mathbb{P}([X = i])$$

Remarques :

R1 – La somme étant finie G_X est bien définie sur $\mathbb{R}$.
R2 – G_X est une fonction polynômiale dont les coefficients sont donnés par la loi de X.

Proposition 1.2

Avec les notations précédentes :

1. La fonction G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$
3. $$G_X(1) = 1; \quad G'_X(1) = \mathbb{E}(X); \quad G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$$
4. Si X et Y sont indépendantes, alors : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$

Remarques :

R1 – D'après le dernier point, la fonction génératrice caractérise donc la loi.
R2 – Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :
$\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + C'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$
R3 – Le point numéro 4 peut se généraliser ainsi :

Exercice 1

Calculer la fonction génératrices des moments dans les cas suivants

1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
2. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Démonstration. □

II. Cas discret infini à valeurs entières

Proposition 2.1

Supposons que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Pour tout $t \in [-1;1]$, la série $\sum_{i\geq 0} t^i \mathbb{P}([X=i])$ est convergente.

Démonstration. □

Définition 2.2

Supposons que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
La fonction génératrice des probabilités de X, notée G_X, est la fonction définie sur $[0-1;1]$ par :

$$\forall t \in [-1;1], \quad G_X(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} t^i \mathbb{P}([X=i])$$

On admet ensuite que les propriétés vues dans le cas discret se généralisent. Pour démontrer ces propriétés, il faudrait que l'on soit capables de dériver sous le signe $\sum_{i=0}^{+\infty}$, ce qui n'est pas le cas en ECG...

Proposition 2.3

Avec les notations précédentes :

1. La fonction G_x est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
2. $\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = \mathbb{E}\left(t^x\right)$
3. $$G_X(1) = 1; \quad G'_X(1) = \mathbb{E}(X); \quad G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$$
4. Si X et Y sont indépendantes, alors : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$

Retenir

La fonction génératrice caractérise donc la loi.

Exercice 2

Calculer la fonction génératrices des moments dans les cas suivants

1. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
2. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 3

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.