# Somme de variables aléatoires à densités

**Définition 0.1**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et continues sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On appelle **produit de convolution** de $f$ et $g$, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$.
On notera $f * g$ cette fonction lorsqu'elle est existe.

## Remarque :

On peut remarquer que $f * g = g * f$. En effet, il suffit de poser le changement de variable affine : $u = x - t$. Il vient directement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du$$

**Lemme 0.2**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Si : $f$ et $g$ sont des densités de probabilités et que $f$ (ou $g$ ) est bornée sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f * g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

## Remarque :

La démonstration de la continuité fait appel à des notions largement hors programme, nous allons montrer simplement l'existence.

*Démonstration.* □

**Théorème 0.3**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires de densités respectives $f_X$ et $f_Y$.

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes et que la fonction $f_X * f_Y$ existe sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement un nombre fini de points, alors la variable aléatoire $X + Y$ est à densité et la fonction $f_X * f_Y$ en est une densité.

*Démonstration.* Largement Hors programme. □

**Exercice 1**

1. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi exponentielle de paramètre 1. Montrons que $X + Y$ est à densité et donnons-en une densité.
2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0\,;1]$. Montrons que $X + Y$ est à densité et donnons-en une densité.

**Proposition 0.4 — Stabilité des lois normales**

- Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_*^+$ainsi que $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$. Alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$$

- Soient $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels, $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs ainsi que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur le même espace probabilisé, telles que $\forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_k; \sigma_k^2\right)$. Alors On a :

$$\forall n \in [\![2; +\infty[\![, X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2\right)$$

*Démonstration.* □