HEC 2013 - Corrigé - Non relu

Exercice

1. (a) $dimE = 4$.

   (b) • Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $$f(\lambda P + Q) = -3X(\lambda P + Q) + X^2(\lambda P + Q)' = \lambda(-3XP + X^2P') + (-3XQ + X^2Q') = \lambda f(P) + f(Q),$$

   donc f est linéaire.
   • Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. Alors

   $$f(P) = -3X(aX^3 + bX^2 + cX + d) + X^2(3aX^2 + 2bX + c) = -bX^3 - 2cX^2 - 3dX \in E,$$

   donc f est bien un endomorphisme de E.

   (c) On a $f(1) = -3X$, $f(X) = -2X^2$, $f(X^2) = -X^3$ et $f(X^3) = 0$, donc

   $$M = Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(f) = Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (d) • M est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale, donc non-inversible.
   • Comme M est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc $Sp(M) = \{0\}$.
   Si M était diagonalisable, il existerait alors P inversible telle que $M = P.(0I).P^{-1} = 0$... Or $M \neq 0$, donc M n'est pas diagonalisable.
   • On a

   $$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^4 = 0,$$

   et, par suite, pour tout $n \geq 4$, $M^n = M^4M^{n-4} = 0M^{n-4} = 0$.

   (e) $aX^3 + bX^2 + cX + d \in Kerf \Leftrightarrow f(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0 \Leftrightarrow -bX^3 - 2cX^2 - 3dX = 0 \Leftrightarrow b = c = d = 0$, donc $Kerf = \{aX^3, a \in \mathbb{R}\} = Vect(X^3)$.
   La famille (X^3) est libre (un seul polynôme, non nul) et génératrice de $kerf$, donc c'est une base de $kerf$, *qui est donc de dimension 1.*

   (f) $Imf = Vect(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = Vect(-3X, -2X^2, -X^3, 0) = Vect(X, X^2, X^3)$.

2. (a) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $aP + bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = 0$. (*)
   Alors, en composant (*) par u^3, on obtient $au^3(P) + bu^4(P) + cu^5(P) + du^6(P) = 0$, c'est-à-dire $au^3(P) = 0$ (car $u^4 = 0$), et donc $a = 0$ (car $u^3(P) \neq 0$).
   Puis, en composant (*) cette fois par u^2, on obtient $bu^3(P) + cu^4(P) + du^5(P) = 0$, c'est-à-dire $bu^3(P) = 0$ et donc $b = 0$.
   Ensuite, en composant (*) cette fois par u, on obtient $cu^3(P) + du^4(P) = 0$, c'est-à-dire $cu^3(P) = 0$ et donc $c = 0$.
   Enfin, (*) est devenue $du^3(P) = 0$, et on a donc aussi $d = 0$.
   La famille $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est donc libre, et, comme elle est composée de 4 éléments dans un espace, E, de dimension 4, c'est une base de E.

   (b) • On a $g(P) = P + u(P) + u^2(P) + u^3(P)$, $g(u(P)) = u(P) + u^2(P) + u^3(P)$, $g(u^2(P)) = u^2(P) + u^3(P)$ et $g(u^3(P)) = u^3(P)$, donc

   $$T = Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Comme T est triangulaire inférieure sans zéro sur la diagonale, T est inversible, donc g est bijectif et, par suite, g est bien u automorphisme de E.
   • Via Gauss-Jordan (calculs sur la copie) ou en voyant T comme une matrice de changement de base, on obtient

   $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Id - Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(u),$$

donc $g^{-1} = Id - u$.
Rq : on aurait pu procéder complètement autrement en remarquant que

$$g \circ (Id - u) = (Id + u + u^2 + u^3) \circ (Id - u) = Id + u + u^2 + u^3 - (u + u^2 + u^3 + u^4) = Id - u^4 = Id,$$

et donc directement que g est bijectif et $g^{-1} = Id - u$.

(c) Pour tout $Q \in keru$, on a $u(Q) = 0$, donc $(g - Id)(Q) = u(Q) + u^2(Q) + u^3(Q) = 0$, donc $Q \in ker(g - Id)$.
Par suite, on a $keru \subset ker(g - Id)$.
De plus, comme $Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g - Id) = T - I$ est de rang 3, $g - Id$ est de rang 3, donc d'après le théorème du rang, $dim(ker(g - Id)) = 4 - rg(g - Id) = 1$.
De même, comme $Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 3, u est de rang 3, donc d'après le théorème du rang, $dim(keru) = 4 - rg(u) = 1$.
Par suite, on a $dim(keru) = dim(ker(g - Id))$ (et $keru \subset ker(g - Id)$), donc

$$keru = ker(g - Id).$$

(d) Comme $T = Mat_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g)$ est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc $Sp(g) = \{1\}$.

Problème

Partie I. Prix d'équilibre

1. (a) $D(p) = O(p) \Leftrightarrow 40 - 8p = 2p + 20 \Leftrightarrow p = 2$, donc il existe un unique prix d'aquilibre $p^* = 2$.

   (b) Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} D_n = O_n &\Leftrightarrow 40 - 8p_n = 2\hat{p_n} + 20 \Leftrightarrow 40 - 8p_n = 4p_{n-1} - 2p_{n-2} + 20 \\ &\Leftrightarrow 8p_n = 20 - 4p_{n-1} + 2p_{n-2} \Leftrightarrow p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

   (c)
```
function p (p0,p1:real ; n:integer) : real
  begin
  if n=0 then p:=p0
    else if n=1 then p:=p1
                else p:= -p(p0,p1,n-1)/2+p(p0,p1,n-2)/4+5/2;
  end;
```

   (d) Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_n = p_n - p^* &= -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2} - 2 \\ &= -\frac{1}{2}(p_{n-1} - 2) + \frac{1}{4}(p_{n-2} - 2) - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2}, \end{aligned}$$

   donc (v_n) est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

   (e) Son équation caractéristique est $r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$.
   $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} > 0$, donc elle admet deux racines

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

   (f) D'où il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n \Leftrightarrow p_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + 2.$$

   En identifiant pour $n = 0$ et $n = 1$, on otbient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + 2 = p_0 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + 2 = p_1 \end{array} \right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + 2 = p_0 \\ (r_2 - r_1)\beta = p_1 - 2 - r_1 p_0 + 2r_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{p_1 - 2 - r_2 p_0 + 2r_2}{r_1 - r_2} \\ \beta = \dfrac{p_1 - 2 - r_1 p_0 + 2r_1}{r_2 - r_1} \end{array} \right.$$

D'où $\boxed{p_n = \dfrac{p_1 - 2 - r_2 p_0 + 2r_2}{r_1 - r_2} r_1^n + \dfrac{p_1 - 2 - r_1 p_0 + 2r_1}{r_2 - r_1} r_2^n + 2.}$

(g) Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, on a $\lim r_1^n = \lim r_2^n = 0$ et, par suite, $\lim p_n = 2 = p^*$.
Dans ces hypothèses, le prix pratiqué tend vers le prix d'équilibre.

2. (a) On a

$$D_n = O_n \Leftrightarrow a - bp_n = c\hat{p_n} + d \Leftrightarrow \boxed{p_n = \frac{a - c\hat{p_n} - d}{b}}$$

et $\hat{p_n} = \dfrac{a - bp_n - d}{c}$.

(b) En utilisant la formule donnée pour $\hat{p_n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} p_n = \frac{a - c\hat{p_n} - d}{b} &\Leftrightarrow p_n = \frac{a - c\hat{p_{n-1}} - c\beta p_{n-1} + c\beta\hat{p_{n-1}} - d}{b} \\ &\Leftrightarrow p_n = \frac{c\hat{p_{n-1}}}{b}(\beta - 1) - \frac{c\beta}{b}p_{n-1} + \frac{a-d}{b} \\ &\Leftrightarrow p_n = \frac{c}{b}\frac{a - bp_{n-1} - d}{c}(\beta - 1) - \frac{c\beta}{b}p_{n-1} + \frac{a-d}{b} \\ &\Leftrightarrow p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b}. \end{aligned}$$

(c) • $D(p) = O(p) \Leftrightarrow a - bp = cp + d \Leftrightarrow p = \dfrac{a-d}{b+c}$.

Le prix d'équilibre est donc $p^* = \dfrac{a-d}{b+c}$.

• La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique.

Cherchons c tel que $c = \left(1 - \beta\dfrac{b+c}{b}\right)c + \beta\dfrac{a-d}{b} \Leftrightarrow c = \dfrac{a-d}{a+c} = p^*$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n - c = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b} - \left(\left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)c + \beta\frac{a-d}{b}\right) = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)(p_{n-1} - c),$$

donc la suite $(p_n - c)$ est une suite géométrique de premier terme $p_0 - c$ et de raison $\left(1 - \beta\dfrac{b+c}{b}\right)$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n - c = \left(1 - \beta\dfrac{b+c}{b}\right)^n (p_0 - c)$, et donc

$$\boxed{p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)^n (p_0 - p^*) + p^*.}$$

(d) • Si $p_0 \neq p^*$, il est clair que la suite $(p_n)_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\left(1 - \beta\dfrac{b+c}{b}\right)^n\right)_n$ converge.

Or, cette suite est géométrique de raison $\left(1 - \beta\dfrac{b+c}{b}\right)$. Elle converge donc si et seulement si $1 - \beta\dfrac{b+c}{b} \in]-1, 1]$.

Or, comme β, b et c sont strictement positifs, on a toujours $1 - \beta\dfrac{b+c}{b} < 1$. Enfin, $1 - \beta\dfrac{b+c}{b} > -1 \Leftrightarrow \beta\dfrac{b+c}{b} < 2 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{c}{b} < \dfrac{2}{\beta} \Leftrightarrow \dfrac{c}{b} < \dfrac{2}{\beta} - 1$. cqfd.

• Dans ce cas, on a $\lim p_n = p^*$.

(e) Si $c < b$, alors on a $\dfrac{c}{b} < 1$ et, comme $\beta \in]0, 1]$, on a $\dfrac{2}{\beta} - 1 \geq 1$.

Donc, si $c < b$, on a $\dfrac{c}{b} < \dfrac{2}{\beta} - 1$, ce qui assure que (p_n) converge vers p^*.

Partie II. Convexité du profit et prix aléatoire

3. (a) h_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$h_p'(x) = p - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < p \Leftrightarrow x < \sqrt{p} \quad (\text{car } x \geq 0).$$

D'où

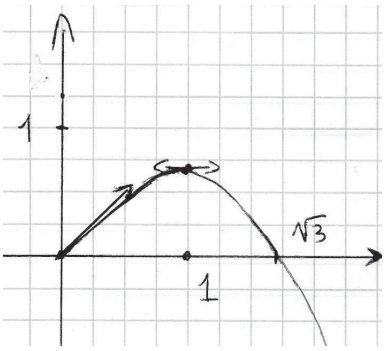
x	0		$\sqrt{p}$		$+\infty$
$h_p'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_p(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2p\sqrt{p}}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} h_p(x) = -\infty$ (par croissances comparées).

$h_p(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(p - \dfrac{x^2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{3p}$ (car $x \geq 0$).

D'après le tableau de variations de h_p, la valeur maximale de h_p sur $\mathbb{R}_+$ est $\dfrac{2p\sqrt{p}}{3}$.

(b) Comme $h_1'(0) = 1$ et $h_1(0) = 0$, on a une demi-tangente en 0 d'équation $y = x$.
Comme $h_1''(x) = -2x \leq 0$, h_1 est concave sur $\mathbb{R}_+$.
On a donc :



4. (a) • Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) \neq +\infty$.
Alors, comme F' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, F' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc il existe M tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) \leq M$.
Par suite, par positivité de l'intégrale, pour tout $x \geq 0$,

$$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t)dt \leq \int_0^x M dt = Mx, \quad \text{et donc} \quad F(x) \leq Mx + F(0).$$

En divisant pour $x > 0$ par $sx^r > 0$, on obtient :

$$\underbrace{\frac{F(x)}{sx^r}}_{\substack{\to \\ x\to+\infty}\ 1 \text{ (car } F(x)\sim sx^r)} \leq \underbrace{\frac{Mx + F(0)}{sx^r}}_{\sim\frac{M}{sx^{r-1}}\to 0 \text{ (car } r>1)},$$

ce qui est donc impossible.
D'où, par l'absurde, on a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = +\infty$.

• F' est strictement croissante (énoncé) et continue (car F est C^2) sur $\mathbb{R}_+$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[F'(0), \lim\limits_{x\to+\infty} F'(x)[= \mathbb{R}_+$.
Elle admet donc une bijection réciproque, notée S et $D_S = \mathbb{R}_+$.

(b) • Π_p est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions de classe C^2 et, pour tout $x \geq 0$,

$$\Pi_p'(x) = p - F'(x) \quad \text{et} \quad \Pi_p''(x) = -F''(x) < 0.$$

Par suite, Π_p est concave sur $\mathbb{R}_+$.
• De plus, $\Pi_p'(x) > 0 \Leftrightarrow F'(x) < p \Leftrightarrow x > S(p)$ (car S est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme bijetcion réciproque d'une fonction décroissante).
On a donc :

x	0		$S(p)$		$+\infty$
$\Pi_p'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Pi_p(x)$		$\nearrow$	$\Pi_p(S(p))$	$\searrow$	
	0				$-\infty$

Par croissances comparées, on a $\Pi_p(x) = px - \underbrace{F(x)}_{\sim sx^r} \sim -sx^r \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$.

D'après le tableau de variations, Π_p admet donc bien un unique maximum sur $\mathbb{R}_+$, atteint en $S(p)$.

5. (a) D'après la question précédente, on a $\boxed{M(p) = \Pi_p(S(p)) = pS(p) - F(S(p)).}$

(b) Comme $F''(x) > 0$ sur son ensemble de définition, $S = F'^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$S'(x) = \frac{1}{F''(S(x))}.$$

Par suite, M est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions dérivables et, pour tout $x \geq 0$,

$$\boxed{M'(x) = S(x) + xS'(x) - S'(x)F'(S(x)) = S(x) + xS'(x) - S'(x)x = S(x)}$$

car S est la bijection réciproque de F' et donc $F'(S(x)) = x$.

(c) Comme $M' = S$, où S est strictement croissante comme bijection réciproque d'une fonction strictement croissante, M est convexe.
De plus, comme $S(x) > 0$ pour tout $x > 0$, M' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ sauf éventuellement en 0, donc M est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

6. (a) Soit $y \in \mathbb{R}_+$.
L'équation de la tangente à C_M au point d'abscisse y est $z = M'(y)(x-y) + M(y)$.
Or M est convexe sur $\mathbb{R}_+$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) \geq M'(y)(x-y) + M(y)$.
En appliquant l'inégalité précédente en $p^{(i)} \in \mathbb{R}_+$, on obtient alors

$$M(p^{(i)}) \geq M'(y)(p^{(i)} - y) + M(y) \Leftrightarrow M(p^{(i)}) - M(y) \geq M'(y)(p^{(i)} - y).$$

(b) Comme p est une variable finie, $M(p)$ admet une espérance et, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(M(p)) &= \sum_{i=1}^{k} M(p^{(i)}) P(p = p^{(i)}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{k} \Big(M'(y)(p^{(i)} - y) + M(y) \Big) P(p = p^{(i)}) \qquad \text{(d'après 6.a)} \\
&\geq M'(y) \underbrace{\sum_{i=1}^{k} p^{(i)} P(p = p^{(i)})}_{=E(p)} - M'(y) y \underbrace{\sum_{i=1}^{k} P(p = p^{(i)})}_{=1} + M(y) \underbrace{\sum_{i=1}^{k} P(p = p^{(i)})}_{=1} \\
&= M'(y)E(p) - yM'(y) + M(y) = M(y) + M'(y)(E(p) - y).
\end{aligned}$$

(c) En prenant $y = E(p)$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$E(M(p)) \geq M(E(p)) + M'(E(p))(E(p) - E(p)) = M(E(p)). \qquad \text{cqfd.}$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ? Est-ce vraiment des maths ? ? ?

1. • Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx = 0$.

L'existence et la valeur de $E(p)$ dépendent donc uniquement de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) dx$.

• En supposant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} M(x) f(x) dx$ converge, on a, toujours d'après le théorème de transfert,

$$E(M(p)) = \int_0^{+\infty} M(x) f(x) dx \qquad (\text{car } f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_-)$$

En utilisant l'inégalité 6.a avec x à la place de $p^{(i)}$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$M(x)f(x) \geq M'(y)(x-y)f(x) + M(y)f(x), \quad \text{et donc} \quad xf(x) \leq \frac{1}{M'(y)} M(x)f(x) + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)} f(x).$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{M'(y)} M(x)f(x) + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)} f(x)dx = \frac{1}{M'(y)} \int_0^{+\infty} M(x)f(x)dx + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)} \int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge comme somme d'intégrales convergentes,

donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ converge aussi (donc p admet une espérance) et

$$E(p) \leq \frac{1}{M'(y)} \int_0^{+\infty} M(x)f(x) + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)} \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{M'(y)} E(M(p)) + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)},$$

et, par suite,

$$E(M(p)) \geq M(y) + M'(y)(E(p) - y).$$

Enfin, en prenant $y = E(p)$, on obtient l'inégalité souhaitée.

Partie III. Espérance conditionnelle

1. (a) Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $P_{X=x_i}(Y = y_j) = P(Y = y_j)$.
Par suite, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$,

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{r} y_j P_{X=x_i}(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{r} y_j P(Y = y_j) = E(Y).$$

Or, pour tout $\omega \in \Omega$, il existe i tel que $X(\omega) = x_i$ et, par suite,

$$Z(\omega) = E(Y|X = X(\omega)) = E(Y|X = x_i) = \varphi(x_i) = E(Y),$$

donc Z est la variable constante égale à $E(Y)$, ie $Z = E(Y)$.

(b) Si $Y = X$, alors pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $P_{X=x_i}(X = x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par suite, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$,

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{q} x_j P_{X=x_i}(X = x_j) = x_i.$$

Enfin, pour tout $\omega \in \Omega$, si $X(\omega) = x_i$, on aura $Z(\omega) = \varphi(x_i) = x_i$, donc on a $Z = X$.

(c) Si tous les réels $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_q)$ sont deux à deux distincts, alors

$$\forall i \in [\![1, q]\!], \quad P(E(Y|X) = \phi(x_i)) = P(X = x_i).$$

(d) On a $Z = \varphi(X)$ qui admet une espérance car X est finie et, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(E(Y|X)) = E(\varphi(X)) &= \sum_{i=1}^{q} \varphi(x_i) P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{r} y_j P(X = x_i) P_{X=x_i}(Y = y_j) \\ &= \sum_{j=1}^{r} y_j \sum_{i=1}^{q} P(X = x_i) P_{X=x_i}(Y = y_j) \\ &= \sum_{j=1}^{r} y_j P(Y = y_j) \qquad \text{(d'après la formule des probabilités totales)} \\ &= E(Y). \end{aligned}$$

(e) Par linéarité de l'espérance conditionnelle (HP ? !), on a :

$$E(\lambda Y + \rho X + \mu|X) = \lambda E(Y|X) + \rho E(X|X) + \mu E(1|X) = \lambda E(Y|X) + \rho X + \mu.$$

Partie IV. Anticipation naïve et anticipation rationnelle

9. (a) • Comme p_n et p_{n-1} suivent la même loi, on a $E(p_n) = E(p_{n-1})$.
De plus, comme $p_n = \theta p_{n-1} + (1 - \theta)p^* + u_n$ et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(p_n) = \theta E(p_{n-1}) + (1 - \theta)p^* + \underbrace{E(u_n)}_{=0}.$$

D'où

$$E(p_n) = \theta E(p_n) + (1 - \theta)p^* + E(u_n) \Leftrightarrow \boxed{E(p_n) = p^*.}$$

• De même, on a $V(p_n) = V(p_{n-1}$ et, comme u_n et p_{n-1} sont indépendantes, on a aussi

$$V(p_n) = V(\theta p_{n-1} + (1 - \theta)p^* + u_n) = \theta^2 V(p_{n-1}) + V(u_n) \Leftrightarrow V(p_n) = \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2}.$$

• Par suite, comme toutes les variables p_n suivent la même loi, on a $E(p_0) = p^*$ et $V(p_0) = \dfrac{\sigma^2}{1 - \theta^2}$.
Comme de plus on a $p_0 = \ell u_0 + m$, on a aussi $E(p_0) = \ell E(u_0) + m = m$ et $V(p_0) = \ell^2 V(u_0) = \ell^2 \sigma^2$, donc, en identifiant, on obtient :

$$\boxed{m = p^* \quad \text{et} \quad \ell = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}}, \qquad \text{et donc} \quad p_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}} u_0 + p^*.}$$

(b) • Comme p_n et p_{n-1} admettent une variance, $Cov(p_n, p_{n-1})$ existe.
Comme $u_n = p_n - \theta p_{n-1} - (1 - \theta)p^*$, on a

$$V(u_n) = V(p_n) + \theta^2 V(p_{n-1}) - 2\theta Cov(p_n, p_{n-1}), \qquad \text{et donc} \quad Cov(p_n, p_{n-1}) = \frac{(1 + \theta^2)V(p_n) - V(u_n)}{2\theta} = \frac{\theta \sigma^2}{1 - \theta^2}.$$

• $\theta = \dfrac{Cov(p_n, p_{n-1})}{\dfrac{\sigma^2}{1 - \theta^2}} = \dfrac{Cov(p_n, p_{n-1})}{\sqrt{V(p_n)V(p_{n-1})}}$, donc θ est le coefficient de corrélation linéaire de (p_n, p_{n-1}).

10. On a

$$\begin{aligned}
E(p_n|p_{n-1}) &= E(\theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + u_n|p_{n-1}) \\
&= \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + E(u_n|p_{n-1}) \qquad \text{(d'après 8.e)} \\
&= \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + E(u_n) \qquad \text{(d'après 8.a, car } u_n \text{ et } p_{n-1} \text{ sont indépendantes)} \\
&= \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^*.
\end{aligned}$$

11. (a) On a $E(\hat{p_n}|p_{n-1}) = E(p_{n-1}|p_{n-1}) = p_{n-1}$ (d'après 8.b).
On a $E(\hat{p_n}) = E(p_{n-1}) = p^*$ et $V(\hat{p_n}) = V(p_{n-1}) = \dfrac{\sigma^2}{1-\theta^2}$.
Enfin, on a

$$E(e_n) = E(p_n) - E(\hat{p_n}) = p^* - p^* = 0$$

et

$$V(e_n) = V(p_n) + V(\hat{p_n}) - 2Cov(p_n, \hat{p_n}) = 2\frac{\sigma^2}{1-\theta^2} - 2\frac{\theta\sigma^2}{1-\theta^2} = \frac{2\sigma^2(1-\theta)}{1-\theta^2} = \frac{2\sigma^2}{1+\theta}.$$

(b) Dans ce modèle, on a donc $\hat{p_n} = \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^*$. Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
E(\hat{p_n}|p_{n-1}) &= E(\theta p_{n-1} + (1-\theta)p^*|p_{n-1}) = \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^*, \\
E(\hat{p_n}) &= \theta E(p_{n-1}) + (1-\theta)p^* = p^*, \\
V(\hat{p_n}) &= \theta^2 V(p_{n-1}) = \frac{\theta^2\sigma^2}{1-\theta^2}, \\
E(e_n) &= E(p_n) - E(\hat{p_n}) = p^* - p^* = 0 \\
\text{et} \quad V(e_n) &= V(p_n) + V(\hat{p_n}) - 2Cov(p_n, \hat{p_n}) \\
&= \frac{(1+\theta^2)\sigma^2}{1-\theta^2} - 2\frac{\theta\sigma^2}{1-\theta^2} \\
&= \frac{(1-2\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\theta^2} \\
&= \frac{(1-\theta)^2\sigma^2}{1-\theta^2} = \frac{(1-\theta)\sigma^2}{1+\theta}.
\end{aligned}$$

(c) Les anticipations naïve et rationnelle prennent en moyenne la même valeur que le prix p_n, Mais l'écart au prix pratiqué de l'anticipation rationnelle a un ecart-type plus petit, et sera donc en moyenne plus proche du prix pratiqué.
Bref, l'anticipation rationnelle est meilleure.