Problème I

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- (Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;
- (Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Quand une matrice est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes de la diagonale.

Conclusion : Les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

2. Soit M une matrice de $\mathcal{D}_n$.

Les valeurs propres de M sont donc les termes de sa diagonale.

Or

β est valeur propre de $(M + \alpha I_n)$

$\iff (M + \alpha I_n - \beta I_n) = (M - (\beta - \alpha) I_n)$ est non inversible

$\iff \beta - \alpha$ est valeur propre de M .

$\iff \beta - \alpha$ est sur la diagonale de M

$\iff \beta$ est sur la diagonale de $M + \alpha I$

Conclusion : Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$

3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

(a) $K_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc n ($\neq 1$) est valeur propre de K_n .

Or K_n n'a que des 1 sur la diagonale.

Conclusion : la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$

- (b) **N.B.** Le problème vient du fait que les valeurs propres d'une somme ne sont pas la somme des valeurs propres :

α_1 est valeur propre de M_1 si il existe une colonne C_1 telle que $M_1 C_1 = \alpha_1 C_1$

α_2 est valeur propre de M_2 si il existe une colonne C_2 telle que $M_2 C_2 = \alpha_2 C_2$

Et si $C_1 \neq C_2$, il n'y a alors pas de raison que $(M_1 + M_2) C_1$ soit $(\alpha_1 + \alpha_2) C_1$

En réexploitant les questions précédentes, et en découpant K_n en la somme d'une triangulaire supérieure T_s et d'une triangulaire inférieure T_i (les termes de la diagonale pouvant être placé au choix dans l'une

ou l'autre),

T_s et T_i sont éléments de $\mathcal{D}_n$, mais leur somme K_n n'y est pas.

Donc $\mathcal{D}_n$ n'est pas stable pour +

Conclusion : $\mathcal{D}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

4. (a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$.

Par la méthode de Gauss : $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \iff \begin{pmatrix} y & z \\ 0 & x \end{pmatrix}$ triangulaire, est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$

Ses valeurs propres sont a et d donc

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - aI = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d - a \end{pmatrix}$ est non inversible donc c ou b est nuls (d'après la question précédente)

Donc M est triangulaire

Conclusion : $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

5. On vérifie que les valeurs propres de A sont 3, 2 et 4 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 3 est valeur propre

$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 2 est valeur propre

$A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_3 + L_1 \rightarrow L_3$

$\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} L_3 + L_2 \rightarrow L_3$

$\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non inversible (triangulaire a terme diagonal nul) donc 4 est valeur propre

Et comme A est d'ordre 3 elle ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres distinctes.

Donc les valeurs propres de A sont 2, 3 et 4 et comme elle a trois valeurs propres distinctes et qu'elle est d'ordre 3

Conclusion : $A \in \mathcal{D}_3$ et est diagonalisable

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

(a) Par la méthode de Gauss, on détermine les conditions d'inversibilité de $M(t) - \alpha I$:

$\begin{pmatrix} 3-\alpha & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\alpha \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_1$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 3-\alpha & 1 & 1+t \end{pmatrix} L_3 - (3-\alpha)L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & -2+\alpha & * \end{pmatrix} L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \text{ avec } * = 1+t-(3-\alpha)(4+2t-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(4+2t-\alpha) \end{pmatrix} \text{ triangulaire}$$

Conclusion : les valeurs propres de $M(t)$ sont 2, 3 et $4+2t$

Conclusion : $M(t) \in \mathcal{D}_3$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

- (b) Si $4+2t \neq 2$ ($\Leftrightarrow t \neq -1$) et $4+2t \neq 3$ ($\Leftrightarrow t \neq -1/2$) alors $M(t)$ a trois valeurs propres distinctes et $M(t)$ est diagonalisable.

Si $t = -1$: $M(-1) - \alpha I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(2-\alpha) \end{pmatrix}$

et pour $\alpha = 2$, (x, y, z) est vecteur propre associé à 2 $\Leftrightarrow x + y = 0$ donc le sous espace propre associé est $E_2 = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$.

La famille étant de deux vecteurs non colinéaire est libre, et forme donc une base de E_2 et $\dim(E_2) = 2$
Comme la dimension du sous espace associé à 3 est au moins 1 alors $\dim(E_2) + \dim(E_3) \geq 3$ (cette dimension est donc 1)

Conclusion : $t = -1$, $M(-1)$ est diagonalisable

Si $t = -1/2$: $M(-1/2) - \alpha I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1/2 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(3-\alpha) \end{pmatrix}$

Pour $\alpha = 3$ alors (x, y, z) est vecteur propre associé à 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}$

Donc le sous espace propre associé à 3 est $E_3 = \text{Vect}(-1, 1, -2)$ qui est de dimension 1

Pour $\alpha = 2$ alors (x, y, z) est vecteur propre associé à 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -\frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$

Donc le sous espace propre associé à 2 est $E_2 = \text{Vect}(-1, 1, 0)$ qui est de dimension 1

Donc la somme des dimensions des sous espaces propres est 2 alors que $M(-1/2)$ est d'ordre 3

Conclusion : La seule valeur de t pour laquelle $M(t)$ n'est pas diagonalisable est $t = -1/2$

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Il existe donc $p \neq 0$ tel que $M^p = 0$ et le polynôme X^p est annulateur de M .

Si α est valeur propre de M alors $\alpha^p = 0$ et donc $\alpha = 0$

Reste à montrer que 0 est bien valeur propre de M :

Comme $M^p = 0$ alors M est non inversible (sinon M^p le serait) donc 0 est valeur propre

Conclusion : 0 est la seule valeur propre de M .

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

- (a) Si $x \in \text{Ker}(u)$ et comme $u(0) = 0$ (car u linéaire) alors $u(u(x)) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(u^2)$
Et de même si $x \in \text{Ker}(u^2)$ alors $u^2(x) = 0$ donc $u(u^2(x)) = u(0) = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \text{ et } \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)}$.

- (b) Si $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3)$ alors par récurrence, pour $i \geq 2$:

Si $\text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^2)$, pour $x \in \text{Ker}(u^{i+1})$ on a $0 = u^{i+1}(x) = u^3(u^{i-2}(x))$ donc $u^{i-2}(x) \in \text{Ker}(u^3) = \text{Ker}(u^2)$ donc $u^2(u^{i-2}(x)) = 0$ et $u^i(x) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}(u^i)$

Alors $\text{Ker}(u^{i+1}) \subset \text{Ker}(u^i)$ et l'inclusion réciproque étant toujours vraie (cf a) donc $\text{Ker}(u^{i+1}) = \text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^2)$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3) \text{ alors pour tout } i \geq 2 : \text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^2)}$

On a supposé que $M^3 \neq 0$ donc $M^2 \neq 0$ et $\text{Ker}(u^2) \neq \mathbb{R}^3$.

Donc pour tout entier i : $\text{Ker}(u^i) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $u^i \neq 0$ et enfin $M^i \neq 0$ et finalement

Conclusion : $\boxed{\text{Si } \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3) \text{ alors } M \text{ n'est pas nilpotente donc } \text{Ker}(u^2) \neq \text{Ker}(u^3)}$

- (c) De même si $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ alors (récurrence) pour tout i : $\text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u)$ et M n'est pas nilpotente

Conclusion : $\boxed{\text{Ker}(u) \neq \text{Ker}(u^2)}$

- (d) Comme $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$ et que les inclusions sont strictes, et que $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$ alors

$$0 < \dim(\text{Ker}(u)) < \dim(\text{Ker}(u^2)) < \dim(\text{Ker}(u^3)) \leq 3$$

(Un sous espace de même dimension que l'espace est l'espace lui même)

les dimension étant entières, $1 \leq \dim(\text{Ker}(u))$ puis $2 \leq \dim(\text{Ker}(u)) + 1 \leq \dim(\text{Ker}(u^2))$ et enfin $3 \leq \dim(\text{Ker}(u^2)) + 1 \leq \dim(\text{Ker}(u^3))$

Conclusion : $\boxed{\dim(\text{Ker}(u)) = 1 : \dim(\text{Ker}(u^2)) = 2 \text{ et } \dim(\text{Ker}(u^3)) = 3}$

Donc $\text{Ker}(u^3) = \mathbb{R}^3$, d'où $u^3 = 0$ et $M^3 = 0$ (si, hypothèse de départ, $M^3 \neq 0$)

Donc par l'absurde, M^3 n'est pas non nulle,

Conclusion : $\boxed{M^3 = 0}$

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les

réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

$$(a) M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + be & bf & ad \\ ed & ac + df & cb \\ fc & ae & eb + df \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M^3 = \begin{pmatrix} ade + bcf & abe + a^2c + adf & b^2e + abc + bdf \\ ac^2 + cdf + bce & ade + bcf & dac + d^2f + bde \\ be^2 + def + ace & fbe + df^2 + acf & ade + bcf \end{pmatrix}$$

$$\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = (ac + df + be) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (bcf + ade) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^3$$

- (b) Si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls, alors $M^3 = 0$ donc M est nilpotente.

Si M est nilpotente alors (2) $M^3 = 0$ donc $\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = 0$.

On a alors

- ou bien tous ses coefficients ne sont pas nuls, alors (M, I) est libre (2 matrices non proportionnelles) donc $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$
- ou bien tous ses coefficients sont nuls, alors $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$

Conclusion : M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls

(c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.

Donc M est nilpotente si et seulement si (1) : $ac + df + be = c + f + e = 0$ et $bcf + ade = cf + e = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = -cf \\ c + f - cf = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = -cf \\ c(1-f) = -f \end{cases} \text{ et pour } f \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = f^2/(1-f) \\ c = -f/(1-f) \end{cases}$$

Donc pour chaque $f \neq 1$ il y a une solution, ce qui en fait une infinité.

Conclusion : il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

(d) Or, pour a, b et d égaux à 1 et $f \neq 1$ et non nul (pour que la matrice M ne soit pas triangulaire) alors

la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -f/(1-f) & 0 & 1 \\ f^2/(1-f) & f & 0 \end{pmatrix}$ est non triangulaire et nilpotente.

Comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 1.

Comme le seul terme sur sa diagonale est 0, on a $M \in \mathcal{D}_3$

Conclusion : $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

(e) Pour avoir tous les coefficients non nuls, on recycle le partie I 2)

Avec $f = 2$ on $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ donc $M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ a tous ses coefficients non nuls.

Problème II

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

1. (a) Posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- i. Si les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, $\text{Cov}(X_k, X_\ell) = 0$ donc $r = 0$ et $V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = np(1-p)$

On reconnaît le modèle de la loi binomiale : $\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

- ii. Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont toutes égales à X_1 , $r = \rho(X_k, X_\ell) = \rho(X_1, X_1) = 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = nX_1. \quad V(S_n) = n^2 V(X_1) = n^2 p(1-p) S_n(\Omega) = \{0, n\} \quad P(S_n = n) = p, P(S_n = 0) = 1 - p$$

(b) Soit $k \in [[1, n]]$. Le cours donne la formule générale suivante :

$$V(S_k) = \sum_{i=1}^k V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Pour $i \neq j$, $\text{Cov}(X_i, X_j) = r \sqrt{V(X_i) V(X_k)} = r \sqrt{p^2(1-p^2)} = rp(1-p)$ (indépendant de i et j)

Il y a $\binom{k}{2}$ termes de ce type dans la double somme $\sum_{1 \leq i < j \leq k}$

Donc $V(S_k) = k \times p(1-p) + 2 \binom{k}{2} \times rp(1-p) = kp(1-p) + 2 \frac{k(k-1)}{2} rp(1-p) = kp(1-p)[1+r(k-1)]$

C'est le résultat attendu.

(c) En prenant $k = n$, on a $V(S_n) = np(1-p)[1+r(n-1)]$

Une variance est toujours positive donc $1+r(n-1) \geq 0$. Donc $r \geq -\frac{1}{n-1}$.

2. On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2. On peut dresser le tableau de la loi du couple (X_1, X_2) . Elle est du type.

$X_2 \backslash X_1$	0	1	loi de X_2
0	γ	β	$1-p$
1	β	α	p
loi de X_1	$1-p$	p	

(a) a : On a $E(X_1 X_2) = \alpha$ donc $\text{Cov}(X_1, X_2) = \alpha - E(X_1)E(X_2) = \alpha - p^2$

$$r = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{p^2(1-p^2)}} = \frac{\alpha - p^2}{p(1-p)}$$

$$r = -1 \iff \alpha - p^2 = -p(1-p)$$

$$\iff \alpha = p^2 - p(1-p) = 2p^2 - p = p(2p-1)$$

C'est le résultat attendu.

(b) $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \gamma$.

On sait que $\alpha + \beta = p$ donc $\beta = p - \alpha = p - p(2p-1) = p(1-2p+1) = 2p(1-p)$

Puis $\gamma + \beta = 1-p$ donc $\gamma = 1-p-\beta = (1-p)(1-2p)$ $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (1-p)(1-2p)$

(c) On suppose $r = -1$.

D'après 1)b, $V(X_1 + X_2) = 2p(1-p)(1+(2-1)r) = 2p(1-p)(1+r) = 0$, car $r = -1$

Donc $X_1 + X_2$ égale une constante de façon presque certaine. Comme $p \in]0, 1[$, la constante ne peut être ni 0, ni 2.

Donc $P(X_1 + X_2 = 1) = 1$

Or $P(X_1 + X_2 = 1) = 2\beta$ donc $\beta = \frac{1}{2}$

$P(X_1 + X_2) = \gamma = 0$ donc $(1-p)(1-2p) = 0$ donc $p = \frac{1}{2}$.

On a donc bien $p = \frac{1}{2}$ et $P([X_1 + X_2 = 1]) = 1$.

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $P\left(\left[\sum_{k=1}^n X_k = 1\right]\right) = 1$.

(a) On a donc $\sum_{k=1}^n X_k = 1$ de façon presque certaine.

$$\text{Donc } V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = 0 = np(1-p)[1+(n-1)r]$$

Donc $r(n-1) + 1 = 0$ et ainsi $r = -\frac{1}{n-1}$

$$E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = 1 = np \text{ donc } p = \frac{1}{n}.$$

(b) Comme $\sum_{k=1}^n X_k = 1$ de façon presque certaine, seul un des X_k peut être égal à 1. Les n -uplets

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive sont

donc :

$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$.

Tous ces n -uplets ont une même probabilité u non nulle. La somme de ces probas donne 1 donc $nu = 1$ donc $u = \frac{1}{n}$.

On remarque, heureusement, que ces résultats sont cohérents avec les résultats du cas $n = 2$ traité précédemment.

Partie II. Loix bêtas-binomiales

4. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(a) Soit $h : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. h est continue sur $I =]0, \frac{1}{2}]$, donc l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} h(t) dt$ est impropre pour la borne 0.

h est positive sur I , et au voisinage de 0, $h(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$

$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}} dt$ converge si et seulement si $1-x < 1$, c'est à dire $x > 0$. Nous obtenons le résultat par le critère de l'équivalent des intégrales de fonctions positives.

(b) Nous utilisons le changement de variable $u = 1-t$ sur l'intégrale $J(\varepsilon) = \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ $J(\varepsilon) = \int_{u=1/2}^{u=\varepsilon} (1-u)^{x-1} u^{y-1} (-du) = \int_{\varepsilon}^{1/2} u^{y-1} (1-u)^{x-1} du$. C'est le résultat demandé.

(c) D'après a), $J(\varepsilon)$ admet une limite finie quand ε tend vers 0 si et seulement si $y > 0$.

Donc $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ CV $\iff y > 0$

Comme $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$, en combinant avec la question a) : $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ CV $\iff x > 0$ et $y > 0$.

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^{+*})^2$, $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

5. Soit x et y des réels strictement positifs.

(a) Soit a et b deux bornes réelles variables vérifiant $0 < a < b < 1$, posons $J(a, b) = \int_a^b t^x(1-t)^{y-1} dt$.

Choisissons $u(t) = t^x$ et $v(t) = (1-t)^{y-1}$, donc $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v(t) = -\frac{1}{y}(1-t)^y$

u et v sont C^1 sur $[a, b]$, on peut donc intégrer par parties :

$J(a, b) = \left[t^x \times \left(-\frac{1}{y} \right) (1-t)^y \right]_a^b + \int_a^b xt^{x-1} \times \frac{1}{y} (1-t)^y dt = -\frac{1}{y} b^x (1-b)^y + \frac{1}{y} a^x (1-a)^y + \frac{x}{y} \int_a^b t^{x-1} (1-t)^y dt$ On fait tendre a et b vers 0 et 1 respectivement (toutes les intégrales convergent d'après ce qui précède).

$B(x+1, y) = \lim_{a \rightarrow 0, b \rightarrow 1} J(a, b) = \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt = \frac{x}{y} B(x, y+1)$ c.q.f.d.

(b) $B(x+1, y) + B(x, y+1) = \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt + \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} [t + (1-t)] dt$

$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ donc $B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y)$

En utilisant 5) a), $\frac{x}{y} B(x, y+1) + B(x, y+1) = B(x, y)$

Ainsi : $\left(\frac{x}{y} + 1 \right) B(x, y+1) = B(x, y)$ ou encore $B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y)$

6. On utilise le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
 B(x+k, y+\ell-k) &= \frac{y+\ell-k-1}{x+y+\ell-1} B(x+k, y+\ell-k-1) \\
 &= \frac{y+\ell-k-1}{x+y+\ell-1} \times \frac{y+\ell-k-2}{x+y+\ell-2} B(x+k, y+\ell-k-2) \\
 &\vdots \\
 &= \underbrace{\frac{(y+\ell-k-1)(y+\ell-k-2)\dots y}{(x+y-\ell-1)(x+y-\ell-2)\dots(x+y+k)}}_{=A} B(x+k, y)
 \end{aligned}$$

On continue en développant $B(x+k, y)$ en utilisant la relation "symétrique" : $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$

$$\begin{aligned}
 B(x+k, y) &= \frac{x+k-1}{x+y+k-1} B(x+k-1, y) \\
 &\vdots \\
 &= \underbrace{\frac{(x+k-1)(x+k-2)\dots x}{(x+y+k-1)(x+y+k-2)\dots(x+y)}}_{=B} B(x, y)
 \end{aligned}$$

Or, en regardant bien, $A \times B$ est bien l'expression de $\frac{(x)^{[k]}(y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}}$

On a donc bien le résultat.

7. (a) On y va, haut les c?urs ...

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n p_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a, b)} \\
 &= \frac{1}{B(a, b)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 t^{a+k-1} (1-t)^{b+n-k-1} dt \\
 &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \right] dt \quad \text{on reconnaît le binôme} \\
 &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} [(t+(1-t))^n] dt \\
 &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{1}{B(a, b)} \times B(a, b) = 1
 \end{aligned}$$

(b) Si $a=1, a^{[k]}=k!$. Si $b=1, b^{[n-k]}=(n-k)!$ et $(a+b)^{[n]}=2^{[n]}=(2+n-1)2^{[n-1]}=(n+1)\times n\times\dots\times 2^{[0]}=(n+1)!$

$$\text{Donc } \frac{a^{[k]}b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

$$P(S=k) = \binom{n}{k} \times \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \quad \text{Donc } S \hookrightarrow \mathcal{U}_{[[0, n]]}$$

$$(c) E(S) = \sum_{k=0}^n kP(S=k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a, b)} dt$$

$$E(S) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} \left[\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \right] dt$$

Dans le crochet, on reconnaît l'expression de l'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, t)$, qui vaut nt .

$$E(S) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 nt^a (1-t)^{b-1} dt = \frac{n}{B(a, b)} \times B(a+1, b) = \frac{n}{B(a, b)} \times \frac{a}{a+b} B(a, b) = \frac{na}{a+b}$$

On obtient bien le résultat.

On peut remarquer que dans le cas $a = 1$ et $b = 1$, on obtient $E(S) = \frac{n}{2}$, ce qui est cohérent avec le résultat trouvé (loi uniforme sur $[[0, n]]$).

Partie III. Un possible dans le cas où $n = 2$

8. (a) Cherchons $P(X_1 = 1)$ en utilisant la formule des probas totales :

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) &= \frac{B(a+2, b)}{B(a, b)} = \frac{a+1}{a+b+1} \times \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \\ &= \frac{a+1}{a+b+1} \times \frac{a}{a+b} \times \frac{B(a, b)}{B(a, b)} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \\ P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) &= \frac{B(a+1, b+1)}{B(a, b)} = \frac{a}{a+b+1} \times \frac{B(a, b+1)}{B(a, b)} \\ &= \frac{a}{a+b+1} \times \frac{b}{a+b} \times \frac{B(a, b)}{B(a, b)} = \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)} \end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} + \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)} \\ &= \frac{a(a+1+b)}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

On procède de même pour trouver $P(X_2 = 1)$.

Donc

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{a}{a+b}\right), \text{ de même pour } X_2$$

(b) Posons $S = X_1 + X_2 \cdot S(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

- $P(S = 2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a^{[2]}b^{[0]}}{(a+b)^{[2]}}$
- $P(S = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{1}{B(a+b)} \times B(a, b+2) = \frac{1}{B(a, b)} \times \frac{b+1}{a+b+1} \times B(a, b+1)$

$$P(S = 0) = \frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a^{[0]}b^{[2]}}{(a+b)^{[2]}}$$

- $P(S = 1) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = 2 \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)} = \binom{2}{1} \frac{a^{[1]}b^{[1]}}{(a+b)^{[2]}}$

En synthèse, on a bien S qui suit la loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(2; a, b)$.

$$c : P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \frac{P(X_2 = 1 \cap X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \times \frac{a+b}{a}$$

$$\text{On a bien : } P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \frac{a+1}{a+b+1}.$$

9. (a) Sans problème, la variable u suit la loi uniforme (à densité) sur $[0, a+b]$.

La variable v suit la loi uniforme (à densité) sur $[0, a+b+1]$.

(b) Voilà le script complété :

```

def randbetabin(a, b):
    x=np.zeros(2)
    u=(a+b)*rd.rand()
    v=(a+b+1)*rd.rand()
    if u<a :
        x[0]=1
        if v<(a+1) :
            x[1]=1
        elif v<a :
            x[1]=1
    return(x)

```

- Pour le premier if à compléter, on sait que $X_1 = 1$, donc X_2 prend la valeur 1 avec la proba $\frac{a+1}{a+b+1}$.
- Pour le deuxième if, on sait que $X_1 = 0$. X_2 prend la valeur 1 avec la probabilité

$$P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \frac{P(X_2 = 1 \cap X_1 = 0)}{P(X_1 = 0)} = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)} \times \frac{a+b}{b} = \frac{a}{a+b+1}$$

$$10. (a) E(X_1 X_2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= E(X_1 X_2) - E(X_1) E(X_2) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{a}{a+b} \left(\frac{a+1}{a+b+1} - \frac{a}{a+b} \right) = \frac{a}{a+b} \left(\frac{(a+1)(a+b) - a(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)} \right) \\ &= \frac{a}{a+b} \left(\frac{a^2 + a + ab + b - a^2 - ab - a}{(a+b+1)(a+b)} \right) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \end{aligned}$$

$$\text{Puis } r = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1) V(X_2)}} = \frac{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}{\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b}} = \frac{1}{a+b+1}$$

$$r = \frac{1}{a+b+1}$$

(b) On cherche a et b pour avoir $r = \frac{1}{a+b+1}$ et $p = \frac{a}{a+b}$

$$\text{Donc } a+b+1 = \frac{1}{r} \text{ puis } a = p(a+b) = a \left(\frac{1}{r} - 1 \right) = p \frac{1-r}{r}$$

$$b = \frac{1}{r} - 1 - a = \frac{1}{r} - 1 - p \frac{1-r}{r} = \frac{1-r-p(1-r)}{r} = \frac{(1-r)(1-p)}{r} \quad \text{En prenant } a = \frac{1-r}{r} p \text{ et}$$

$b = \frac{1-r}{r}(1-p)$ avec la fonction randbetabin, on obtient bien ce qui est demandé.