

CONCOURS BLANC

Option économique

MATHEMATIQUES

11 Janvier 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème I : Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- (Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;
- (Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.
2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.
3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
 - (a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.
 - (b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
4. (a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.
 - (b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que la matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.
- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t .
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.
 - (b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M .
8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
- (a) Montrer les inclusions $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.
 - (b) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.
 - (c) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.
 - (d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.
9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.
- (a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.
 - (b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.
 - (c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.
 - (d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.
 - (e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

PROBLEME II :

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est-à-dire : $\forall k \in [1, n] ; P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = 1 - p$.

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [1, n]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in [1, n]^2, \frac{\text{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)} \sqrt{V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ r & \text{si } k \neq \ell \end{cases}.$$

- (a) Dans les deux cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n X_k$ en fonction de n et p .

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\sum_{k=1}^n X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

- (b) Montrer que pour tout $k \in [1, n]$, la variance de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^k X_i$ est donnée par la formule :

$$V\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = kp(1-p)(1 + (k-1)r)$$

- (c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\frac{1}{n-1}$.

2. On suppose dans cette question que n est égal à 2 .

(a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p - 1)$.

(b) Que vaut alors $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$?

(c) En déduire que r ne peut être égal à -1 que lorsque $p = \frac{1}{2}$ et $P([X_1 + X_2 = 1]) = 1$.

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $P\left(\left[\sum_{k=1}^n X_k = 1\right]\right) = 1$.

(a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n .

(b) Déterminer les n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive et la calculer.

Partie II. Lois bêta-binomiales

4. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(a) Justifier que l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

(b) Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1} dt$$

(c) En déduire que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

5. Soit x et y des réels strictement positifs.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $B(x+1, y) = \frac{x}{y} \times B(x, y+1)$.

(b) En déduire l'égalité : $B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} \times B(x, y)$.

6. Pour tout réel z , soit $\left((z)^{[m]}\right)_{m \in \mathbf{N}}$ la suite définie par : $(z)^{[0]} = 1$ et $\forall m \in \mathbf{N}, (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}$.
(par exemple, pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a : $(1)^{[m]} = m!$)

Établir pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ et pour tout couple (k, ℓ) d'entiers tels que $0 \leq k \leq \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x, y)$$

7. Soit a et b des réels strictement positifs.

Pour tout $k \in [0, n]$, on pose : $p_k = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

(a) À l'aide de la relation obtenue dans la question 6, montrer que $\sum_{k=0}^n p_k = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire S suit la loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(n; a, b)$ si $S(\Omega) = [0, n]$ et si :

$$\forall k \in [0, n], P([S = k]) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

(b) Reconnaître la loi $\mathbf{B}(n; 1, 1)$.

(c) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $\mathbf{B}(n; a, b)$ est égale à $\frac{na}{a+b}$.

Partie III. Un modèle possible dans le cas où $n = 2$

Soit a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ telles que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2, P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]) = \frac{B(a+x_1+x_2, b+2-x_1-x_2)}{B(a, b)}$$

8. (a) Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.

(b) Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $\mathbf{B}(2; a, b)$.

(c) Établir la relation : $P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \frac{a+1}{a+b+1}$.

9. La fonction Python suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), effectue une simulation des deux variables aléatoires X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

```
def randbetabin(a,b):  
    x=np.zeros(2)  
    u=(a+b)*np.rand()  
    v=(a+b+1)*np.rand()  
    if u<a :  
        x[0]=1  
    if ... :  
        x[1]=...  
    elif ... :  
        x[1]=...  
    return(x)
```

- (a) Préciser la loi simulée par la variable u de la ligne (3).
- (b) Compléter les lignes (5) et (6).
10. (a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2 .
- (b) Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$.
Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r .