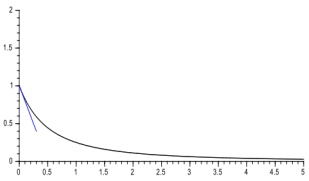
Correction du DM n° 7

Le 05/02/24

Exercice 1

1. (a) g_0 est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ (comme quotient de deux fonctions C^∞ avec un dénominateur non nul), strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ comme inverse d'une fonction strictement croissante et (strictement) positive.
$\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1+x)^2} = 0.$
L'équation de la tangente en 0 est $y = g_0'(0)(x-0) + g_0(0)$.
Or, pour tout $x \geq 0$, $g_0'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^3}$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = -2x + 1$.
Rq : En fait, il s'agit d'une demi-tangente, car g_0 n'est pas définie sur $]-\infty, 0[$.



(b) Soit $n \geq 1$.
g_n est C^∞ sur $[0,+\infty[$ comme composée, puissance et quotient de fonctions usuelles et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad g_n'(x) = \frac{n\dfrac{1}{1+x}(\ln(1+x))^{n-1}(1+x)^2 - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4}$$

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad g_n'(x) = \frac{\overbrace{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}}^{\geq 0}(n - 2\ln(1+x))}{\underbrace{(1+x)^4}_{\geq 0}}$$

D'où $g_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow n - 2\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 2\ln(1+x) \Leftrightarrow 1 + x \leq e^{n/2} \Leftrightarrow x \leq e^{n/2} - 1$.
Comme $n/2 > 0$, $e^{n/2} > 1$ et donc $e^{n/2} - 1 \in [0,+\infty[$.
On a donc :

x	0		$e^{n/2}-1$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$g_n)$	0	↘	M_n	↗	0

$M_n = g_n(e^{n/2} - 1)$
$g_n(0) = \dfrac{(\ln(1))^n}{1^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) \underset{\text{en posant } y=1+x}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{(\ln y)^n}{y^2} = 0$ par croissances comparées.

(c) D'après le tableau de variations de g_n, g_n admet un maximum sur $[0,+\infty[$ en $e^{n/2} - 1$ qui vaut :

$$M_n = g_n(e^{n/2} - 1) = \frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

$\ln(M_n) = n\ln\left(\dfrac{n}{2e}\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = +\infty$.

(d) Pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{g_n(x)}{1/x^{3/2}} \sim \dfrac{(\ln(1+x))^n}{x^{1/2}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (toujours par croissances comparées),
donc $g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

2. (a) Soit $A > 0$.
$$\int_0^A g_0(t)dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1 \underset{A\to+\infty}{\to} 1,$$
donc $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)dt$ converge et vaut 1.

(b) Soit $n \geq 1$.
• g_n et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.
• $g_n(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ d'après 1d.
• Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}dt$ converge (Riemann et $3/2 > 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)dt$ converge aussi.
• Enfin, comme g_n est continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)dt$ existe.
Par suite, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge.

(c) Soit $A > 0$.
Posons $u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}$, $u'(t) = \dfrac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n$, $v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$, $v(t) = -\dfrac{1}{1+t}$.
Comme u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$, on peut intégrer par parties et on a :
$$\begin{aligned}\int_0^A g_{n+1}(t)dt &= \left[-\frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n \frac{1}{1+t}dt \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A g_n(t)dt.\end{aligned}$$
Or, $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^A g_{n+1}(t)dt = I_{n+1}$, $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^A g_n(t)dt = I_n$ (car I_n et I_{n+1} convergent)
et $\lim\limits_{A\to+\infty} -\dfrac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$ (par croissances comparées),
donc, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient bien :
$$I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

(d) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$ $\quad (HR_n)$.
Initialisation : On a $I_0 = 1$ et $0! = 1$, donc on a bien HR_0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors $I_{n+1} = (n+1)I_n \underset{HR_n}{=} (n+1)n! = (n+1)!$
On a bien HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

3. (a) • f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
• f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
• $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{n!}n! = 1$.
f_n peut donc bien être considérée comme une densité de probabilité.

(b) Soit $n \geq 1$.

- $t \mapsto tf_n(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.
- $\dfrac{1/t}{tf_n(t)} = \dfrac{n!(1+t)^2}{t^2(\ln(1+t))^n} \sim \dfrac{n!}{(\ln(1+t))^n} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, donc $\dfrac{1}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}(tf_n(t))$.
- Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge (Riemann de paramètre $1 \leq 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} tf_n(t)dt$ diverge aussi.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf_n(t)dt$ diverge, donc X_n n'admet pas d'espérance.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x < 0$, $F_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

(d) Pour tout $x \geq 0$, $F_0(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ (cf calculs faits en 2a).

(e) En reprenant les calculs faits en 2c (en remplaçant n par $k-1$ et A par x, on obtient :

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \frac{1}{k!}\int_0^x g_k(t)dt = \frac{1}{k!}\left(-\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + k\int_0^x g_{k-1}(t)dt\right) \\ &= -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x g_{k-1}(t)dt = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x), \end{aligned}$$

et on a donc bien :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(f) En sommant l'égalité précédente pour $k = 1..n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

et donc, en télescopant à gauche de l'égalité :

$$F_n(x) - F_0(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

et donc

$$F_n(x) = F_0(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(g)
- Pour tout $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
- Pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \end{aligned}$$

(série exponentielle de paramètre $\ln(1+x)$, donc convergente)

$$\underset{n\to+\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x}\exp(\ln(1+x)) = 1 - \frac{1+x}{1+x} = 0.$$

(h) Posons $G : x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
G est nulle sur $\mathbb{R}$.
G ne varie pas de 0 à 1 en croissant donc G n'est pas une fonction de répartition.
Donc X_n ne converge pas en loi vers une variable X.

4. (a) On a $X_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$, donc $(1+X_n)(\Omega) = [1, +\infty[$, donc $Y_n = \ln(1+X_n)$ est bien définie et $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

(b) D'après le théorème de transfert, Y_n admet une espérance
si et seulement si $\displaystyle\int_{X(\Omega)} \ln(1+x) f_n(x)dx$ converge absolument.
Or,

$$\begin{aligned}\int_{X(\Omega)} \ln(1+x) f_n(x)dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{(1+x)^2}dx \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_{n+1}(x)dx \\ &= \frac{1}{n!} I_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1\end{aligned}$$

Par suite, d'après le théorème de transfert, $Y_n = \ln(1+X_n)$ admet une espérance et
$\boxed{E(Y_n) = n+1}$

(c) De même, d'après le théorème de transfert, Y_n^2 admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{X(\Omega)} (\ln(1+x))^2 f_n(x)dx$ converge absolument.
Or,

$$\begin{aligned}\int_{X(\Omega)} (\ln(1+x))^2 f_n(x)dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{(\ln(1+x))^{n+2}}{(1+x)^2}dx \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_{n+2}(x)dx \\ &= \frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)\end{aligned}$$

Par suite, d'après le théorème de transfert, $Y_n^2 = (\ln(1+X_n))^2$ admet une espérance et $E(Y_n^2) = (n+2)(n+1)$, donc Y_n admet une variance et, d'après Huygens Koenig,
$V(Y_n) = E(Y_n^2) - (E(Y_n))^2 = (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = n+1$
$\boxed{V(Y_n) = n+1}$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(\ln(1+X_n) \leq x) = P(1+X_n \leq e^x) = P(X_n \leq e^x - 1) = F_n(e^x - 1).$$

(e) H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points comme composée de F_n (qui est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point (fonction de répartition de X_n)) et de $x \mapsto e^x - 1$ (qui est C^1 sur $\mathbb{R}$).
Y_n est donc une variable à densité et une densité de Y_n est

$$h_n : x \mapsto e^x f_n(e^x - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x - 1 < 0 \\ e^x \dfrac{1}{n!}\dfrac{(\ln(1+e^x-1))^n}{(1+e^x-1)^2} & \text{si } e^x - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(f) $h_0 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ On reconnaît la densité d'une loi $\mathcal{E}(1)$, donc $Y_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
D'après le théorème de transfert, Y_0 admet un moment d'ordre k (et donc $Y_0^k = (\ln(1+X_0))^k$ une

espérance) si et seulement si $\int_{X_0(\Omega)} (\ln(1+x))^k f_0(x)dx$ converge absolument.

Or,

$$\begin{aligned}\int_{X_0(\Omega)} (\ln(1+x))^k f_0(x)dx &= \int_0^{+\infty} (\ln(1+x))^k f_0(x)dx \qquad (\text{car } X_0(\Omega)=\mathbb{R}^+)\\ &= \int_0^{+\infty} (\ln(1+x))^k \frac{1}{(1+x)^2}dx \qquad (\text{définition de } f_0)\\ &= I_k\end{aligned}$$

donc $\int_{X_0(\Omega)} (\ln(1+x))^k f_0(x)dx$ converge absolument et, d'après le théorème de transfert, Y_0^k admet une espérance et $E(Y_0^k) = I_k = k!$. On peut conclure :

$\boxed{Y_0 \text{ admet un moment d'ordre } k, \text{ qui vaut } k!}$

Exercice 2

1.a) Cette relation peut aussi s'écrire $\ln(r) = \ln(a) - b\ln(t)$. On a représenté le nuage de points $(\ln(t_i), \ln(r_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ on constate un très bon alignement des points, donc on peut considérer qu'une telle relation est raisonnable.

On peut par ailleurs calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les $\ln(t_i)$ et les $\ln(r_i)$. S'il est proche de 1 en valeur absolue, on peut alors valider la relation.

On trouve $-0,9947$ ce qui confirme l'utilisation de ce modèle.

Pour obtenir (a,b) on peut réaliser un ajustement aux moindres carrés du nuage de points $(\ln(t_i), \ln(r_i))$.

b) Notons $r(x)$ le rang de la ville d'effectif x, cette proportion vaut $\frac{r(x)}{n} = \frac{a}{nx^b}$.

2.a) Si $x < x_0$, alors $F(x) = 0$. Si $x \geq x_0, F(x) = \int_{x_0}^x \theta \frac{x_0^\theta}{t^{\theta+1}}dt = x_0^\theta \left[-\frac{1}{t^\theta}\right]_{x_0}^x = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\theta$.

b) On a donc que si x est l'effectif d'une ville, $\mathbb{P}([T > x]) = \frac{x_0^\theta}{x^\theta}$. Si l'on rapproche ce résultat du résultat de la question précédente on peut alors considérer que cette probabilité correspond à la valeur trouvée dans cette question soit $\frac{a}{nx^b}$. Ces deux résultats sont donc cohérents en identifiant θ à b et x_0^θ à $\frac{a}{n}$ donc x_0 à $\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{b}}$.

c) On s'intéresse à la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ i.e. de $\int_{x_0}^{+\infty} \theta \frac{x_0^\theta}{t^\theta}dt$. La fonction $H : t \mapsto \frac{\theta}{-\theta+1}\frac{{x_0}^\theta}{t^{\theta-1}}$ est une primitive de la fonction dans l'intégrale qui admet une limite finie égale à 0 en $+\infty$. Donc cette intégrale est convergente et vaut $-H(x_0) = \frac{\theta}{\theta-1}x_0$.

3.a) Par définition, $\mathbb{P}_x(T > t) = \frac{\mathbb{P}(T>t]\cap[T>x)}{\mathbb{P}([T>x])} = \frac{1-F(t)}{1-F(x)}$ puisque $t \geq x$. Finalement $\mathbb{P}_x(T > t) = \frac{\left(\frac{x_0}{t}\right)^\theta}{\left(\frac{x_0}{x}\right)^\theta} = \left(\frac{x}{t}\right)^\theta$.

b) D'après la question précédente, $F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq x \\ 1 - \left(\frac{x}{t}\right)^\theta & \text{sinon.} \end{cases}$. On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\text{Par}(\theta, x)$. D'où l'espérance de cette loi existe et vaut $\frac{\theta}{\theta-1}x$. 4.a) En reprenant la méthode utilisée dans le 4.a), on obtient que :

$$G_x(t) = \begin{cases} \frac{F_Y(t)-F_Y(x)}{1-F_Y(x)} & \text{si } t > x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que G_x est bien la fonction de répartition d'une variable à densité. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{x\}$ et

$$G_x'(t) = \begin{cases} \frac{f_Y(t)}{1-F_Y(x)} & \text{si } t > x \\ 0 & \text{si } t < x \end{cases}$$

d'où une densité...

b) On peut donc en déduire que pour tout $x \geq x_0, \int_x^{+\infty} tf_Y(t)dt$ converge et vérifie : $\int_x^{+\infty} tf_Y(t)dt = \delta x\,(1 - F_Y(x))$. En utilisant une primitive, on voit que la fonction $K : x \mapsto \int_x^{+\infty} tf_Y(t)dt$ est de classe C^1

sur $[x_0, +\infty[$ et vérifie $K'(x) = -xf_Y(x)$. Donc, pour tout $x \geq x_0, -xf_Y(x) = \delta\left(1 - F_Y(x) - xf_Y(x)\right)$ i.e $(\delta - 1)xf_Y(x) = \delta\left(1 - F_Y(x)\right)$.

c) Sur $\left[x_0, +\infty\right[, (1-\delta)xy' - \delta y = 0 \Longleftrightarrow y' = \frac{\delta}{(1-\delta)x}y$. Posons $\beta = \frac{\delta}{\delta - 1}$. Les solutions sont de la forme $y = \lambda \exp\left(-\beta(\ln(x)\right) = \frac{\lambda}{x^\beta}$ avec λ réel.

d) Si l'on pose pour tout $x \geq x_0, \varphi(x) = 1 - F_Y(x), \varphi$ vérifie l'équation différentielle précédente et $\varphi\left(x_0\right) = 1$ d'où $\lambda = x_0^\beta$ et pour tout $x \geq x_0, F_Y(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\beta$. On en conclut que Y suit la loi Par $\left(\frac{\delta}{\delta - 1}, x_0\right)$.