Corrigé EDHEC 2015

E C G

DS n°5

Option économique

MATHEMATIQUES

17 Février 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

1. (a) La dimension de l'image de f est son rang, qui est aussi le rang de C. On détermine donc le rang de C, par la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\\L_4\leftarrow L_4-L_1\\L_5\leftarrow L_5-L_1}}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2\\L_4\leftarrow L_4-L_2}}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

On obtient une matrice échelonnée qui comporte 2 lignes non nulles. Donc le rang de C est 2. On en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2}$.

D'après les deux premières colonnes de C, on a $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ et $f(e_2) = e_4 + e_5$. Donc $e_2+e_3+e_4 = f(e_1-e_2)$ et $e_4+e_5 = f(e_2)$, ce qui prouve que les deux vecteurs $e_2+e_3+e_4$ appartiennent bien à l'image de $\mathrm{Im}(f)$. De plus, ils ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre.
Ainsi, $(e_2+e_3+e_4, e_4+e_5)$ est une famille libre, constituée de 2 vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$, avec $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. On en déduit que $\boxed{(e_2 + e_3 + e_4, e_4 + e_5) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$.

(b) D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^5)$, soit (d'après la question précédente) : $2 + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 5$. On en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3}$.
D'après la matrice C, on a $f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = f(e_5)$. Donc $f(e_2 - e_3) = 0$, $f(e_3 - e_4) = 0$ et $f(e_4 - e_5) = 0$. Par conséquent, $e_2 - e_3$, $e_3 - e_4$ et $e_4 - e_5$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(f)$. Vérifions

qu'ils forment une famille libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(e_2 - e_3) + \beta(e_3 - e_4) + \gamma(e_4 - e_5) = 0$. Alors $\alpha e_2 + (-\alpha + \beta)e_3 + (-\beta + \gamma)e_4 - \gamma e_5 = 0$. Donc (puisque la famille (e_2, e_3, e_4, e_5) est libre) : $\begin{cases} \alpha &= 0 \\ -\alpha + \beta &= 0 \\ -\beta + \gamma &= 0 \\ -\gamma &= 0 \end{cases}$, et donc $\begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$.

Ainsi, la famille $(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5)$ est une famille libre, constituée de 3 vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$, avec $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$.

On en déduit que $\boxed{(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$.

Remarque : ce n'était pas la seule réponse possible. $\mathrm{Ker}(f)$ *admet une infinité de bases différentes.*

2. (a) Par linéarité de f, on $f(u) = f(e_2) + f(e_3) + f(e_4)$, soit, d'après la matrice C : $f(u) = (e_1 + e_5) + (e_1 + e_5) + (e_1 + e_5)$. D'où $\boxed{f(u) = 3e_1 + 3e_5}$.

De même : $f(v) = f(e_1) + f(e_5) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) + (e_1 + e_5)$, soit $\boxed{f(v) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5}$.

Ensuite, toujours par linéarité de f, on a $f(u-v) = f(u) - f(v) = (3e_1 + 3e_5) - (2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5) = e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5$, i.e $\boxed{f(u - v) = v - u}$.

Et de même : $f(u+3v) = f(u) + 3f(v) = (3e_1 + 3e_5) + 3(2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5) = 9e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 3e_4 + 9e_5$, i.e $\boxed{f(u + 3v) = 3u + 9v}$.

(b) Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, on sait déjà que 0 est valeur propre de f. L'espace propre associé est $\mathrm{Ker}(f) = Vect(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5)$.

De plus, d'après la question précédente, on a $f(u - v) = -(u - v)$, avec $u - v$ qui est un vecteur non nul. Ceci montre que -1 est vecteur propre de f. Et de même, $f(u + 3v) = 3(u + 3v)$, avec $u + 3v$ qui est un vecteur non nul. Donc 3 est également vecteur propre de f.

Déterminons les espaces propres associés aux valeurs propres -1 et 3. On sait que ces deux espaces sont chacun au moins de dimension 1. De plus, comme la somme des dimensions des espaces propres doit être inférieure ou égale à 5 (car $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$) et que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$, ils ne peuvent être de dimension strictement plus grande que 1.

Par conséquent, ils sont chacun de dimension 1. L'espace propre associé à la valeur propre -1 est simplement $Vect(u - v)$ et celui associé à la valeur propre 3 est $Vect(u + 3v)$.

Enfin, comme la somme des dimensions des 3 espaces propres trouvés est égale à 5, il ne peut pas y avoir d'autres valeurs propres.

Conclusion : f admet exactement 3 valeurs propres, qui sont 0, -1 et 3. Les espaces propres associés sont respectivement : $Vect(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5)$, $Vect(u - v)$ et $Vect(u + 3v)$.

(c) On a vu à la question précédente que la somme des dimensions des espaces propres de f était 5, comme $\dim(\mathbb{R}^5)$. Ceci prouve que f est diagonalisable, et donc que $\boxed{C \text{ est diagonalisable}}$ également.

De plus, toujours d'après la question précédente, on a $C = RDR^{-1}$ avec $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$ et

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}.$$

3. (a) Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned}
D(D+I)(D-3I) &= \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3&0&0&0&0\\ 0&-3&0&0&0\\ 0&0&-3&0&0\\ 0&0&0&-4&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3&0&0&0&0\\ 0&-3&0&0&0\\ 0&0&-3&0&0\\ 0&0&0&-4&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Soit : $\boxed{D(D+I)(D-3I)=0}$.

(b) La matrice D est la matrice de f dans la base (constituée de vecteurs propres) $(e_2-e_3, e_3-e_4, e_4-e_5, u-v, u+3v)$. Comme $D(D+I)(D-3I)=0$, on en déduit que $f\circ(f+Id)\circ(f+3Id)=0$ et donc (en réinterprétant matriciellement, mais cette fois dans la base $\mathcal{B}$) : $C(C+I)(C-3I)=0$.
En développant, ceci se réécrit $C^3-2C^2-3C=0$, ce qui prouve que $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } C}$.

Remarque : on pouvait le faire purement matriciellement. Il suffit de développer $D(D+I)(D-3I)=0$, puis de remplacer D par $R^{-1}CR$, avant de multiplier par R (à gauche) et R^{-1} à droite.

4. (a) Soit $n \geqslant 1$ quelconque.
En remplaçant X par 0 dans l'équation $X^n=(X^3-2X^2-3X)Q_n(X)+a_nX^2+b_nX+c_n$, on obtient $c_n=0$.
De même, en remplaçant X par -1, on obtient : $(-1)^n=a_n-b_n+c_n$. Et en remplaçant X par 3, on obtient : $3^n=9a_n+3b_n+c_n$.
On résout alors le système formé par les 3 équations obtenues ci-dessus :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & c_n &=& 0\\ a_n &-& b_n &+& c_n &=& (-1)^n\\ 9a_n &+& 3b_n &+& c_n &=& 3^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} & & c_n &=& 0\\ a_n &-& b_n &=& (-1)^n\\ 9a_n &+& 3b_n &=& 3^n \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} & & c_n &=& 0\\ a_n &-& b_n &=& (-1)^n\\ 12a_n & & &=& 3^n+3(-1)^n \end{array}\right.$$

Par conséquent, on a $\boxed{a_n=\frac{1}{12}\big(3^n+3(-1)^n\big)}$, puis en reportant dans la deuxième ligne : $\boxed{b_n=\frac{1}{12}\big(3^n-9(-1)^n\big)}$, et toujours $\boxed{c_n=0}$.

(b) D'après la relation donnée en préambule de la question 4, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$C^n=(C^3-2C^2-3C)Q_n(C)+a_nC^2+b_nC+c_nI$$

En remplaçant $C^3 - 2C^2 - 3C$ par 0 (question 3.(b)), et a_n, b_n et c_n par leurs valeurs respectives (question précédente), on obtient alors :

$$\boxed{C^n = \frac{1}{12}\big(3^n + 3(-1)^n\big)C^2 + \frac{1}{12}\big(3^n - 9(-1)^n\big)C}$$

5. (a)
```
import numpy as np
C=np.array([[1,1,1,1,1],[1,0,0,0,0],[1,0,0,0,0],[1,0,0,0,0],[1,1,1,1,1]])
```

(b)
```
import numpy.linalg as al
def diag(C):
        R=np.array([[0,0,0,-1,3],[1,0,0,1,1],[-1,1,0,1,1],[0,-1,1,1,1],[0,0,-1,
        return(al.inv(R).dot(C).dot(R))
```

Exercice 2

1. (a) Étant donné que X et Y sont toutes deux à valeurs dans $[0;1]$, on sait déjà que U est à valeurs dans $[0;1]$. Donc, pour tout $x < 0$, on a $F_U(x) = P(U \leqslant x) = 0$. Et, pour tout $x > 1$, on a $F_U(x) = P(U \leqslant x) = 1$. Ensuite, pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$\begin{aligned}
F_U(x) &= P(U \leqslant x) \\
&= 1 - P(U > x) \\
&= 1 - P(\min(X,Y) > x) \\
&= 1 - P\Big((X > x) \cap (Y > x)\Big) \\
&= 1 - P(X > x)P(Y > x) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= 1 - \Big(1 - P(X \leqslant x)\Big)\Big(1 - P(Y \leqslant x)\Big) \\
&= 1 - (1-x)(1-x) \quad (X \text{ et } Y \text{ suivent une loi uniforme sur } [0;1[) \\
&= 1 - (1 - 2x + x^2) \\
&= 2x - x^2
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que la fonction de répartition F_U de U est définie par :

$$\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

(b) La fonction de répartition F_U est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$, sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ (qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points).
De même, F_U est également continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. Il reste à étudier la continuité en 0 et en 1.
En 0 : à gauche, on a : $F_U(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$, et à droite : $F_U(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} F_U(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F_U(x) = F_U(0)$. La fonction F_U est donc continue en 0.
De même, en 1, on a $F_U(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 1$ et $F_U(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} F_U(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} F_U(x) = F_U(1)$, ce qui montre que F_U est également continue en 1.
On en déduit que F_U est continue sur $\mathbb{R}$ (car continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, en 0 et en 1). Comme elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, ceci prouve que $\boxed{U \text{ est une variable aléatoire à densité}}$.

De plus, pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $F'_U(x) = 0$, et pour tout $x \in]0;1[$, $F_U(x) = 2 - 2x$. On en déduit une densité f_U de U :

$$\boxed{f_U(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(c) L'espérance de U existe si et seulement si l'intégrale $\int_{\infty}^{+\infty} x f_U(x) dx$ est absolument convergente, i.e si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 x f_U(x) dx$ est absolument convergente (car f_U est nulle en dehors de $[0;1]$). Or, il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, donc elle est bien absolument convergente. Donc U admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
E(U) &= \int_0^1 x f_U(x) dx \\
&= \int_0^1 x(2-2x) dx \\
&= \int_0^1 (2x - 2x^2) dx \\
&= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Ce qui donne : $\boxed{E(U) = \frac{1}{3}}$.

De même, par le théorème du transfert, $E(U^2)$ existe également et :

$$\begin{aligned}
E(U^2) &= \int_0^1 x^2 f_U(x) dx \\
&= \int_0^1 x^2 (2-2x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (2x^2 - 2x^3) dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ce qui donne : $E(U^2) = \frac{1}{6}$. On en déduit que U admet une variance et, par la formule de König-Huygens : $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$, c'est-à-dire : $\boxed{V(U) = \frac{1}{18}}$.

2. (a) Le temps passé par C est constitué du temps d'attente de C (attente que le premier des deux autres clients finisse) et de son temps de passage. Par conséquent : $\boxed{T = \min(X,Y) + Z = U + Z}$.

(b) Par linéarité de l'espérance, T admet une espérance (car U et Z en admette une), et $E(T) = E(U) + E(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, soit $\boxed{E(T) = \frac{5}{6}}$.

En ce qui concerne la variance, U et Z sont indépendantes (car X,Y et Z le sont et que U est fonction de X et Y) et admettent chacune une variance. On en déduit que T admet une variance et $V(T) = V(U) + V(Z) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12}$, soit $\boxed{V(T) = \frac{5}{36}}$.

3. (a)
```
import numpy.random as rd
```

```
n=int(input("Entrez la valeur de n:"))
x=rd.rand(n,1)
y=rd.rand(n,1)
z=rd.rand(n,1)
u=np.zeros([n,1])
v=np.zeros([n,1])
t=np.zeros([n,1])
for i in range(n):
    u[i]=min(x[i],y[i])
    v[i]=max(x[i],y[i])
    t[i]=u[i]+z[i]
print('u=',u,'v=',v,'w=',w)
```

(b) La variable T désigne le temps passé par C dans l'agence, et V le maximum des temps passés par les deux autres clients.

L'événement $[T \geqslant V]$ signifie donc que C sort de l'agence après les deux autres clients.

(c)
```
p=0
for i in range(n):
        if t[i]>=v[i]:
                p=p+1
print('p=',p/n)
```

(d) On peut conjecturer que $p = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 3

1. (a) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, et soit f une densité associée, par exemple la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Alors on sait que (puisque X est une variable aléatoire à densité) que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente est vaut 1. Autrement dit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1}$$

De même, on sait aussi que X admet une espérance, qui égale à 1. Autrement dit, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente et vaut 1, i.e :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1}$$

Enfin, on sait également que X admet une variance, et donc un moment d'ordre 2. Ceci signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ est convergente. De plus, elle vaut $E(X^2)$, soit, d'après la formule de König-Huygens : $V(X) + E(X)^2 = 1 + 1^2 = 2$. Par conséquent :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}dt = 2}$$

(b) Soient $a \in [0;+\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$. On a alors $I_{k+1}(a) = \int_0^a u'(t)v(t)dt$ avec u et v les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ définies par $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = t^{k+1}$. On peut donc faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{k+1}(a) &= \Big[u(t)v(t)\Big]_0^a - \int_0^a u(t)v'(t)dt \\ &= \Big[-e^{-t}t^{k+1}\Big]_0^a + \int_0^a e^{-t}(k+1)t^k dt \\ &= -e^{-a}a^{k+1} + (k+1)\int_0^a t^k e^{-t}dt \end{aligned}$$

On a donc bien : $\boxed{I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}}$.

(c) D'après ce qui précède (en prenant $k = 2$) on a, pour tout $a \geqslant 0$: $I_3(a) = 3I_2(a) - a^3e^{-a}$. Or, $a^3e^{-a} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées), et $I_2(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} I_2$, avec I_2 qui est égal à 2 (question 1).
On en déduit que $I_3(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 6$.
Par conséquent, $\boxed{\text{l'intégrale } I_3 \text{ est convergente et } I_3 = 6}$.

De même, pour tout $a \geqslant 0$, on a : $I_4(a) = 4I_3(a) - a^4e^{-a}$. Or, on sait que $a^4e^{-a} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées). Donc $I_4(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 4I_3$.
On en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } I_4 \text{ est convergente et } I_4 = 24}$.

Remarque : on pourrait continuer ainsi et montrer par récurrence que $I_k = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. La fonction $t \mapsto (y+xt+t^2)^2e^{-t}$ est une fonction continue sur $[0;+\infty[$ (comme produit de fonctions continues) et positive (un carré et une exponentielle sont toujours positifs). De plus, au voisinage de $+\infty$: $(y+xt+t^2)^2e^{-t} \sim t^4e^{-t}$. Et on sait (question précédente) que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt$ converge.
Par critère de comparaison pour les fonctions continues positives, on en déduit que
$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} (y+xt+t^2)^2e^{-t}dt \text{ est convergente}}$.

3. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Pour tout $t \geqslant 0$, on a (en développant) :

$$\begin{aligned} (y+xt+t^2)^2e^{-t} &= (y+xt+t^2)(y+xt+t^2)e^{-t} \\ &= \Big(y^2 + 2xyt + 2yt^2 + x^2t^2 + 2xt^3 + t^4\Big)e^{-t} \\ &= y^2e^{-t} + 2xyte^{-t} + 2yt^2e^{-t} + x^2t^2e^{-t} + 2xt^3e^{-t} + t^4e^{-t} \end{aligned}$$

D'où, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}(y+xt+t^2)^2e^{-t}dt = y^2\int_0^{+\infty} e^{-t}dt + 2xy\int_0^{+\infty} te^{-t}dt + 2y\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt \\ + x^2\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt + 2x\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt \end{aligned}$$

(Toutes ces intégrales sont bien convergentes d'après les questions précédentes)
Autrement dit :

$$f(x,y) = y^2I_0 + 2xyI_1 + 2yI_2 + x^2I_2 + 2xI_3 + I_4$$

C'est-à-dire, d'après les valeurs calculées à la question 1 :

$$\boxed{f(x,y) = y^2 + 2xy + 4y + 2x^2 + 12x + 24}$$

(b) On sait que les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc, par opérations (somme et produit) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$.

4. (a) Il suffit de dériver. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\boxed{\partial_1 f(x,y) = 4x + 12 + 2y \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = 2y + 4 + 2x}$$

On cherche le (ou les) point(s) critique(s) de f en cherchant là où ces dérivées partielles s'annulent simultanément :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) &= 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y &= -12 \\ 2x + 2y &= -4 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} 4x + 2y &= -12 \\ -2x &= 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y &= 2 \\ x &= -4 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Conclusion : la fonction } f \text{ admet un unique point critique qui est } (-4,2).}$

(b) En redérivant les dérivées partielles d'ordre 1, on obtient, pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\partial_{1,1} f(x,y) = 4 \quad ; \quad \partial_{1,2} f(x,y) = \partial_{1,2} f(x,y) = 2 \quad ; \quad \partial_{2,2} f(x,y) = 2}$$

La matrice hessienne de f est donc en tout point (en donc en particulier au point critique) la matrice suivante :

$$\boxed{\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

(c) Appelons H la matrice ci-dessus. On cherche ses valeurs propres.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } H &\iff H - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff (4-\lambda)(2-\lambda) - 2 \times 2 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \end{aligned}$$

Or, le discriminant du trinôme ci-dessus est 20. Par conséquent, l'équation $\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$ admet 2 solutions réelles : $\dfrac{6-\sqrt{20}}{2}$ et $\dfrac{6+\sqrt{20}}{2}$, c'est-à-dire : $3-\sqrt{5}$ et $3+\sqrt{5}$.

$\boxed{\text{Conclusion : les valeurs propres de } \nabla^2(f)(-4,2) \text{ sont } 3-\sqrt{5} \text{ et } 3+\sqrt{5}.}$

Ces deux valeurs propres sont strictement positives (car $\sqrt{5} < 3$).

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ atteint un minimum local en } (-4,2), \text{ qui vaut } f(-4,2) = 4.}$

5. (a) Partons du carré au membre de droite et développons :

$$\begin{aligned} 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 &= 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)\left(x + \frac{y}{2} + 3\right) \\ &= 2\left(x^2 + xy + 6x + \frac{y^2}{4} + 3y + 9\right) \\ &= 2x^2 + 2xy + 12x + \frac{y^2}{2} + 6y + 18 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{2x^2+2xy+12x = 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 - \left(\frac{y^2}{2}+6y+18\right)}$$

(b) De même :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(y-2)^2 &= \frac{1}{2}\left(y^2-4y+4\right)\\ &= \frac{1}{2}y^2-2y+2\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{y^2}{2}-2y+6 = \frac{1}{2}(y-2)^2+4}$$

(c) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}f(x,y) &= 2x^2+2xy+12x+y^2+4y+24\\ &= 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 - \left(\frac{y^2}{2}+6y+18\right)+y^2+4y+24 \quad \text{(question 5.a)}\\ &= 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 + \frac{y^2}{2}-2y+6\end{aligned}$$

C'est-à-dire, d'après la question 5.(b) :

$$\boxed{f(x,y) = 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2+4}$$

Comme un carré est toujours positif, on en déduit que $f(x,y)\geqslant 4$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, i.e $f(x,y)\geqslant f(-4,2)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Autrement dit : $\boxed{f \text{ atteint un minimum global en } (-4,2)}$.

Problème

Partie I

1. (a) Pour tout $t\in[0;x]$, on a $t^2\leqslant x^2$, donc $1-t^2\geqslant 1-x^2$. Or, on a également $1-x^2>0$ (car $0<x<1$, qui implique $x^2<1$). Donc $1-t^2\geqslant 1-x^2>0$. Par conséquent, on peut passer à l'inverse et on obtient : $0<\dfrac{1}{1-t^2}\leqslant\dfrac{1}{1-x^2}$, ce qui donne, en multipliant par t^m (qui est positif ou nul) : $0\leqslant\dfrac{t^m}{1-t^2}\leqslant\dfrac{t^m}{1-x^2}$.
On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}dt$$

C'est-à-dire :

$$0\leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^m dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^m dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. On en déduit :

$$0\leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\times\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Et donc, comme $x\leqslant 1$:

$$\boxed{0\leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{m+1}}$$

(b) On a sans difficulté : $\dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2. (a) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $t^{2j} = (t^2)^j$. On reconnaît donc la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2, avec $t^2 \neq 1$. D'où :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

(b) On intègre l'égalité ci-dessus sur l'intervalle $[0;x]$:

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}dt$$

C'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^{2j}dt = \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$. Donc finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

(c) D'après la question 1.(b) : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

Conclusion : la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

C'est-à-dire, d'après les questions 2.(b) et 2.(c) :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

Les $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ se simplifient de chaque côté, et on en déduit :

$$\boxed{\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

Partie II

1. La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier succès (obtenir pile) à une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (les lancers de pièce), chacune ayant une probabilité de succès égale à p.
   Par conséquent, $\boxed{N \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

2. (a) La commande `np.floor` renvoie la partie entière d'un nombre. Il faut donc montrer que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ est égal à m si et seulement si m est pair. Pour cela, on fait une disjonction de cas :
   - Si m est pair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k$ également. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k = m$.
   - Si m est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k - 1$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k - \frac{1}{2}$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k - 1$. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k - 2 = m - 1 \neq m$.

   Ainsi, on a montré que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$ si et seulement si m est pair.

   Conclusion : la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie donc la valeur de m si et seulement si m est pair.

   (b) La réponse attendue était :

```
p=float(input('donner la valeur de p'))
N=rd.geometric(p,1)
X=rd.randint(1,N+1)
if 2*np.floor(X/2)==X :
        print('le joueur a perdu')
else:
        print('le joueur a gagné')
```

3. (a) Si $k \geqslant j$, alors $2k+1 > 2j$. Il est donc impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j$. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j}$.

   (b) De même, si $k \geqslant j+1$, alors $k > j$ et donc $2k+1 > 2j+1$. Par conséquent, il est impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j+1$. On en déduit que $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j+1}$.

   (c) Si k appartient à $[\![0; j-1]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1$ et donc, en particulier : $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$. De plus, une fois l'urne remplie avec les boules numérotées de 1 à $2j$, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Par conséquent : $\boxed{P_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j} \text{ si } k \leqslant j-1}$.

   (d) De même, si k appartient à $[\![0; j]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j+1$. En remplissant l'urne avec des boules numérotées de 1 à $2j+1$, la boule numérotée $2k+1$ peut donc être tirée. Et comme il y a équiprobabilité : $\boxed{P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j+1} \text{ si } k \leqslant j}$.

4. (a) Comme N suit une loi géométrique, on a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $\Big([N = n]\Big)_{n \geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = 2k+1)}$$

Maintenant, on sépare la somme en deux (comme indiqué dans l'énoncé) entre, d'un côté les n pairs (qui s'écrivent sous la forme $2j$) et d'un autre côté les termes impairs (qui s'écrivent sous la forme $2j+1$) :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) = &\sum_{j=1}^{+\infty} P(N=2j)P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &+\sum_{j=1}^{+\infty} P(N=2j+1)P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\end{aligned}$$

On remplace $P(N=2j)$ et $P(N=2j+1)$ en se servant de la loi de N :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) &= \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j-1}P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\\ &= \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j}P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &\quad+\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j+1}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\end{aligned}$$

Enfin, on remplace $P_{(N=2j)}(X=2k+1)$ et $P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$ en se servant de la question 3 :

$$\begin{aligned}P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}P_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &\quad+\frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}P_{(N=2j+1)}(X=2k+1) \quad \text{(questions 3.a et 3.b)}\\ &= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}\frac{1}{2j}\\ &\quad+\frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}\frac{1}{2j+1} \quad \text{(questions 3.c et 3.d)}\end{aligned}$$

D'où, en mettant $\frac{p}{q}$ en facteur :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j}+\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)}$$

(b) D'après la question I.2.d et la partie admise juste après, on a (en remplaçant dans l'égalité ci-dessus) :

$$P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt+\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)$$

(on peut bien remplacer x par q car q appartient à $[0;1[$).

On simplifie :

$$\begin{aligned} P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right) \\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt \end{aligned}$$

Ce qui donne bien (en simplifiant par $t+1$) :

$$\boxed{P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt}$$

5. (a) Pour tout $t \in [0;q]$, on a $t \leqslant q < 1$, donc $1-t \geqslant 1-q > 0$, et donc, en prenant l'inverse :

$$0 < \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-q}$$

D'où, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$ (qui est positif ou nul car $t \geqslant 0$, $1-t \geqslant 0$ et $1+t \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leqslant \frac{1}{1-q} \times \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$$

On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0;q]$:

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (question I.1.b). On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

(b) On fait la somme en se servant du résultat de la question 4.(b) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt\right) \\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{1-t}\right) dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right) dt \end{aligned}$$

On reconnaît (à l'intérieur de l'intégrale) la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2 (avec $t^2 \neq 1$). Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t} \times \frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\right) dt \\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt \\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \end{aligned}$$

Ce qui donne bien, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)}$$

(c) L'événement A est l'événement « X est impair ». On a donc $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est l'événement « X est impair et $X \leqslant 2n+1$ ». De plus, $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille croissante d'événements. Par conséquent : $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$ n'est autre que $\sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1)$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$P(A_n) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

On a donc :

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

C'est-à-dire, d'après la question 5.(a) :

$$\boxed{P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt}$$

6. (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t) + b(1-t)^2 + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{a(1-t^2) + b(1-2t+t^2) + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{(-a+b)t^2 + (-2b+c)t + (a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, ceci est égal à $\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ si $\begin{cases} -a+b &= 0\\ -2b+c &= 0\\ a+b+c &= 1\end{cases}$

On résout ce système :

$$\begin{cases} -a+b &= 0\\ -2b+c &= 0\\ a+b+c &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} a &= b\\ c &= 2b\\ a+b+c &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} a &= b\\ c &= 2b\\ 4b &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1/4\\ c &= 1/2\\ b &= 1/4\end{cases}$$

Conclusion : pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

avec $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ et $c = \frac{1}{2}$.

(b) On reprend le résultat de la question 5.(c) et on calcule l'intégrale en se servant de la question précédente :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}dt\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right) \\
&= \frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne, en développant :

$$\boxed{P(A) = \frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}}$$

(c) On a $0 < 1-q < 1+q$ (car $q \in]0;1[$). On en déduit que $\frac{1+q}{1-q} > 1$, et donc $\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) > 0$. De plus, $\frac{1-q}{4q} > 0$ car $1-q > 0$ et $4q > 0$. Donc $\frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) > 0$.
On en déduit, avec l'expression obtenue à la question précédente :

$$\boxed{P(A) > \frac{1}{2}}$$