DS n°5

Option économique

MATHEMATIQUES

17 Février 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer la dimension de l'image de f , puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\text{Im}(f)$.
 - En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$, puis donner une base de $\text{Ker}(f)$.
- On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.
 - Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v .
 - En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.
 - Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.
- Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$.
 - En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C .
- On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X) Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

- En utilisant les racines de P , déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n .

- (b) Dduire de ce qui prcde l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2 .
5. On importe dans Python les modules `numpy` as `np` et `numpy.linalg` as `al`.
- (a) Que faut-il taper dans Python pour dfinir la matrice C l'aide du module `numpy` ?
- (b) Ecrire un programme d'en tte `def diag(C)` : qui prend en entre une matrice et renvoie le produit $R^{-1}CR$.

Exercice 2

Trois personnes, notes A , B et C entrent simultanment dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanment l'instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un des deux guichets se libre pour se faire servir.

On suppose que :

- Les dures de passage au guichet des trois personnes A , B et C sont mesures en heures et on suppose que ce sont des variables alatoires indpendantes, notes respectivement X , Y et Z , et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1[$.
 - La dure du changement de personne un guichet est ngligeable.
1. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$ et on admet que U et V sont des variables alatoires.
- (a) Montrer que la fonction de rpartition F_U de U est dfinie par :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- (b) En dduire que U est une variable alatoire densit et donner f_U de U .
- (c) Dterminer l'esprance et la variance de U .
2. On note T le temps total pass par C dans l'agence bancaire.
- (a) Exprimer T en fonction de certaines variables prcdentes.
- (b) En dduire $E(T)$ et $V(T)$.
3. (a) On rappelle que, si a et b sont deux nombres rels les commandes `min(a,b)` et `max(a,b)`. On rappelle galement que `rd.rand(n,1)` simule n variables alatoires indpendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

Complter les commandes Python suivantes pour qu'elles permettent de simuler n fois les variables alatoires U , V et T , pour n entr par l'utilisateur :

```
import numpy.random as rd

n=int(input("Entrez la valeur de n:"))
x=rd.rand(n,1)
y=rd.rand(n,1)
z=rd.rand(n,1)
u=np.zeros([n,1])
v=np.zeros([n,1])
t=np.zeros([n,1])
for i in range(n):
    u[i]=...
    v[i]=...
    t[i]=...
print('u=',u,'v=',v,'w=',w)
```

- (b) Que représente l'événement $(T \geq V)$?
- (c) On souhaite déterminer une valeur approchée de la probabilité $P(T \geq V)$, notée p , en simulant un grand nombre de fois le passage des clients A, B et C aux guichets.

Compléter le programme pour que, placées sous les commandes écrite à la question 3.(a), elles permettent d'obtenir une valeur approchée de p :

```
p=0
for i in range(n):
    if ...:
        p=p+1
print('p=', ...)
```

- (d) Lors de plusieurs essais des commandes ci-dessus, avec $n = 10000$, la réponse donnée par Python est comprise entre 0.66 et 0.67 .

Que peut-on conjecturer quant à la valeur exacte de p ?

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel k , on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

- (a) Justifier que I_0, I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur (on pourra s'appuyer sur le cours de probabilité).
- (b) Pour tout réel a positif et tout entier naturel k , on pose $I_k(a) = \int_0^a t^k e^{-t} dt$. Établir, en utilisant une intégration par parties, la relation suivante : $I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$.
- (c) En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier que : $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.
2. Déduire des questions précédentes que, pour tout couple (x, y) de réels, $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.

On considère, pour tout la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

3. (a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.
- (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a, b) de f .
- (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a, b)$ de f en son point critique.
- (c) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a, b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a, b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.
5. Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.
- (a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 - \dots$$

- (b) Compléter de même l'égalité : $\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y - 2)^2 + \dots$

- (c) En déduire une autre écriture de $f(x, y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

Problème

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

(b) En déduire que : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt = 0$.

2. (a) Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

(b) En déduire que : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

(c) Utiliser la question 1 pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

(d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.

Si N prend la valeur n , le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1. Reconnaître la loi de N .

2. (a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2 * np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

(b) Compléter les commandes Python suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages «le joueur a gagné » ou «le joueur a perdu ».

```
p=float(input('donner la valeur de p'))
N=rd.geometric(...,1)
X=rd.randint(...)
if ... :
    print('...')
else:
    print('...')
```

3. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j , la valeur de $P_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$.

(b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j + 1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$.

(c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j - 1 \rrbracket$.

(d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j \rrbracket$.

4. (a) Justifier que $P(X = 2k + 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 2k + 1)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n , montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)$$

- (b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$.
5. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt = 0$.
- (b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n P(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right)$$

- (c) En déduire que : $P(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt$.
6. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

- (b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q .
- (c) En déduire que $P(A) > \frac{1}{2}$.