CONCOURS BLANC

Option économique

MATHEMATIQUES

11 Mars 2024

Exercice n°1

On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{5} (x^2 (1 - x^2) + y^2 (1 - y^2) + 2xy)$.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y) \\ \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 + 2y \\ 2y - 4y^3 + 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculons également les dérivées partielles d'ordre 2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2 f(x, y) &= \frac{2}{5} (1 - 6x^2) \\ \partial_{1,2}^2 f(x, y) &= \partial_{2,1}^2 f(x, y) \quad (\text{par Schwarz car } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2) \\ &= \frac{2}{5} \\ \partial_{2,2}^2 f(x, y) &= \frac{2}{5} (1 - 6y^2) \end{aligned}$$

Ceci permet de former la matrice hessienne de f . Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 - 6x^2 & 1 \\ 1 & 1 - 6y^2 \end{pmatrix}$$

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ point critique de } f &\iff \nabla f(x, y) = (0, 0) \\ \iff &\begin{cases} x - 2x^3 + y = 0 \\ y - 2y^3 + x = 0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} x + y = 2x^3 \\ x + y = 2y^3 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} x + y = 2x^3 \\ x^3 = y^3 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme la fonction cube est (bijective donc) injective, on a :

$$\begin{aligned}
(x, y) \text{ point critique de } f &\iff \begin{cases} x + y = 2x^3 \\ x = y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = 2x^3 \\ x = y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x(1 - x^2) = 0 \\ x = y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ x = y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = y \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

3. (a) La figure 1 représente les lignes de niveaux de f sur $[-2, 2] \times [-2, 2]$ avec ce qui semble être un pas de 0.1. La figure 2 représente la surface d'équation $z = f(x, y)$ sur le même domaine.
- (b) Avec la figure 2, on remarque qu'au voisinage de $(1, 1)$ et de $(-1, -1)$, il y a une "colline". Cela indique que f admet un maximum local en ces points. En revanche $(0, 0)$ semble être un point selle. Avec la figure 1, au voisinage de $(1, 1)$ et $(-1, -1)$, les lignes de niveaux ont tendance à se resserrer au fur et à mesure que le niveau augmente, cela traduit qu'il y a un maximum local en ces points. Les lignes de niveaux n'ont pas ce profil au voisinage de $(0, 0)$. Ce serait donc un point selle.
4. Pour déterminer la nature de chacun des trois points critiques, on raisonne avec le signe des valeurs propres de la hessienne. Observons alors que la matrice hessienne est la même aux points critiques $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. On nomme H_1 cette matrice.

$$\nabla^2 f(1, 1) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = H_1 = \nabla^2 f(-1, -1) = \frac{2}{5} M_1$$

Cherchons les valeurs propres de M_1 qui ont le même signe que celles de H_1 .

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } M_1 &\iff M_1 - \lambda \text{ non inversible} \\
&\iff \det(M_1 - \lambda I) = 0 \\
&\iff \lambda^2 + 10\lambda - 1 = 0 \\
&\iff \lambda = -6 \text{ ou } \lambda = -4
\end{aligned}$$

Les deux valeurs propres sont strictement négatives. On a bien, comme conjecturé, un maximum local à la fois en $(1, 1)$ et en $(-1, -1)$.

Pour le troisième point critique,

$$H_2 = \nabla^2 f(0, 0) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible. La méthode du signe des valeurs propres ne peut pas nous renseigner; il faut donc raisonner autrement. Il faut montrer que f ne présente ni un maximum local, ni un minimum local en $(0, 0)$, par exemple en regardant dans deux directions différentes autour de $(0, 0)$.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, x) - f(0, 0) = \frac{1}{5} (2x^2(1 - x^2) + 2x^2) = \frac{2}{5} x^2 (2 - x^2).$$

Pour $x \in]0; \sqrt{2}$, on a donc $f(x, x) > f(0, 0)$. Ainsi f n'admet pas de maximum local en $(0, 0)$.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, -x) = \frac{1}{5} (2x^2(1 - x^2) - 2x^2) = -\frac{2}{5} x^4$$

Pour $x \neq 0$, on a donc $f(x, -x) < 0$. Ainsi f n'admet pas de minimum local en $(0, 0)$.

On en déduit que $(0, 0)$ est un point selle (ou point col).

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = x^2 - x^4 \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$ donc f n'est pas minorée.
6. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est polynomiale). Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = \frac{2}{5} - \frac{t}{5} = \frac{2-t}{5}$$

Il est facile de trouver le signe de $g'(t)$ et d'en déduire ses variations, ce qu'on résume dans le tableau ci-dessous

t	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(t)$	$+$	0	$-$
g	$-\infty$	$g(2)$	$-\infty$

En particulier, g atteint un maximum en $t = 2$ qui vaut

$$g(2) = \frac{4}{5} - \frac{4}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

et g n'est clairement par minorée (du fait des limites infinies).

- (b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} g(x^2 + y^2) - f(x, y) &= \frac{1}{5} \left(2(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - x^2 + x^4 - y^2 + y^4 - 2xy \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(x^2 + y^2 - \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2} + x^4 + y^4 - 2xy \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(x^2 - 2xy + y^2 + \frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{2} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left((x - y)^2 + \frac{(x^2 - y^2)^2}{2} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

donc $f(x, y) \leq g(x^2 + y^2)$.

- (c) Il découle des deux dernières questions que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) \leq g(x^2 + y^2) \leq \frac{2}{5}$$

De plus, si f admet un maximum global, il est local et est donc atteint en un point critique. On a

$$f(0, 0) = 0, \quad f(1, 1) = \frac{1}{5}(0 + 0 + 2) = \frac{2}{5}, \quad \text{et} \quad f(-1, -1) = \frac{1}{5}(0 + 0 + 2) = \frac{2}{5}.$$

On en déduit que f possède un maximum global qui vaut $\frac{2}{5}$ et qui est atteint en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(u_0, u_1) \in [0; 1]^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.

7. (a) Par définition de la suite, on écrit

```

def suite(n, u0, u1):
    L=np.zeros(n+1)
    L[0]=u0
    L[1]=u1
    for k in range(n-1):
        L[k+2]=f(L[k],L[k+1])
    return L

```

(b) Sans difficulté non plus

```

def figure(n, u0, u1):
    L=suite(n, u0, u1)
    plt.plot(range(n+1), L)
    plt.show()

```

- (c) Après observation de la figure, il est raisonnable de conjecturer que la suite (u_n) converge vers 0 quelles que soient les valeurs de u_0 et u_1 (comprises entre 0 et 1).
8. (a) Si x et y sont dans $[0; 1]$, alors $x^2(1-x^2) \geq 0$, $y^2(1-y^2) \geq 0$ et $xy \geq 0$ donc $f(x, y) \geq 0$. De plus on a vu que $f(x, y) \leq \frac{2}{5} \leq 1$.

Raisonnons donc par récurrence double.

- initialisation. Pour $n = 0$ et $n = 1$, les hypothèses de l'énoncé donnent bien $(u_0, u_1) \in [0, 1]^2$.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in [0; 1]$ et $u_{n+1} \in [0; 1]$. Montrons que $u_{n+2} \in [0; 1]$. En utilisant ce qui précède on a

$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \in [0; 1]$$

ce qui termine cette récurrence.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \leq g(u_n^2 + u_{n+1}^2) = \frac{2}{5}(u_n^2 + u_{n+1}^2) - \frac{1}{10}(u_n^2 + u_{n+1}^2) \leq \frac{2}{5}(u_n^2 + u_{n+1}^2).$$

Puisque u_n et u_{n+1} sont dans $[0; 1]$ d'après la question précédente, on a $u_n^2 \leq u_n$ et $u_{n+1}^2 \leq u_{n+1}$ donc

$$u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$$

ce qu'on voulait.

(c) On procède à nouveau par récurrence double.

- initialisation. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $a_0 = u_0$ et $a_1 = u_1$, et la propriété est trivialement vérifiée.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq a_n$ et $u_{n+1} \leq a_{n+1}$. Montrons que $u_{n+2} \leq a_{n+2}$. On a alors, par la question précédente,

$$u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}) \leq \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) = a_{n+2}$$

ce qui est bien la propriété au rang $n + 2$ et termine cette récurrence.

(d) La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$r^2 = \frac{2}{5}r + \frac{2}{5}$$

i.e.

$$r^2 - \frac{2}{5}r - \frac{2}{5} = 0$$

Son discriminant est $\frac{4}{25} - 4 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4 \times 11}{25} > 0$ donc elle admet deux racines :

$$s = \frac{2/5 - 2\sqrt{11}/5}{2} = \frac{1 - \sqrt{11}}{5} \quad \text{et} \quad t = \frac{2/5 + 2\sqrt{11}/5}{2} = \frac{1 + \sqrt{11}}{5}$$

Ainsi, d'après le cours, il existe des réels λ, μ (qui dépendent des valeurs initiales a_0 et a_1) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \lambda s^n + \mu t^n.$$

(e) Comme $9 < 11 < 16$, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $3 < \sqrt{11} < 4$ donc

$$\frac{4}{5} = \frac{1+3}{5} < \frac{1+\sqrt{11}}{5} < \frac{1+4}{5} = 1$$

et

$$-\frac{3}{5} = \frac{1-4}{5} < \frac{1-\sqrt{11}}{5} < \frac{1-3}{5} = -\frac{2}{5}$$

ce qui permet de voir que $|s| < 1$ et $|t| < 1$.

On en déduit que $s^n \rightarrow 0$ et $t^n \rightarrow 0$ donc $a_n \rightarrow 0$. Finalement, par théorème d'encadrement (puisque $0 \leq u_n \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), $u_n \rightarrow 0$, ce qui est bien ce qu'on avait conjecturé à la Question 7C).

Exercice n°2

Partie 1 : Étude d'une variable aléatoire à densité

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{e^{-(-x)}}{(1+e^{-(-x)})^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(e^x(e^{-x}+1))^2} = \frac{e^x}{e^{2x}(e^{-x}+1)^2} = f(x)$$

et f est bien paire.

2. L'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$ il y a donc a priori deux intégrales dont on doit montrer la convergence, mais comme f est paire on se limitera à l'intégrale entre 0 et $+\infty$. Soit $A > 0$. Comme suggéré par l'énoncé, on pose

$$u = u(t) = 1 + e^{-t} \rightsquigarrow du = -e^{-t} dt$$

Comme u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$, le changement de variable est licite et donne

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)dt &= \int_2^{1+e^{-A}} \frac{-du}{u^2} = \int_{1+e^{-A}}^2 \frac{du}{u^2} \\ &= \left[-\frac{1}{u} \right]_{1+e^{-A}}^2 \\ &= \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-A}} = 1$, donc l'intégrale converge vers $\frac{1}{2}$. Par parité de f , on a bien la convergence de l'intégrale demandée et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$$

3. D'après la question précédente, il reste seulement à vérifier que f est continue (sauf peut-être en un nombre fini de points) et qu'elle est positive partout sur $\mathbb{R}$. C'est clairement le cas :

- Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto (1+e^{-x})^2$ sont continues comme combinaisons/puissances de fonctions usuelles définies avec l'exponentielle et la seconde ne s'annule jamais. Par quotient, f est alors continue sur $\mathbb{R}$.
- Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x , il est immédiat que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Au final, f est bien une densité de probabilité.

4. On va à nouveau utiliser un changement de variable pour calculer $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par poser $B < x$. Par le même changement de variable que précédemment, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_B^x f(t)dt &= \int_{1+e^{-B}}^{1+e^{-x}} \frac{-du}{u^2} \\ &= \left[\frac{1}{u} \right]_{1+e^{-B}}^{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-B}} \\ &\xrightarrow{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

Et on peut alors conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$.

$$\begin{aligned} 1 - F_X(-x) &= 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{1}{1+e^{-x}} \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

Cette propriété de symétrie est aussi partagée par la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

6. (a) La fonction φ est quotient de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

et φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme on a clairement

$$\varphi(x) \sim \frac{e^x}{e^x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \quad \varphi(x) \sim \frac{-1}{1} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$$

on peut dresser le tableau de variations complet de φ :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variation de f	-1	1

- (b) Par théorème de bijection, φ étant strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J =]-1, 1[$. De plus, pour tout $y \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = y &\iff \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \\ &\iff e^x - 1 = y(e^x + 1) \\ &\iff e^x(1 - y) = 1 + y \\ &\iff e^x = \frac{1 + y}{1 - y} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \end{aligned}$$

et on peut alors conclure que

$$\varphi^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

- (c) On définit la variable aléatoire Y par $Y = \varphi(X)$. On détermine la loi de Y en explicitant sa fonction de répartition mais commençons par observer que, φ étant à valeurs dans $] - 1, 1[$, on a $Y(\Omega) =] - 1, 1[$ et donc, pour tout $x \leq -1$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$ et pour tout $x \geq 1$, $F_Y(x) = 1$. Pour $x \in] - 1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(\varphi(X) \leq x) \\ &= P(X \leq \varphi^{-1}(x)) \quad \text{car } \varphi \text{ bijection croissante} \\ &= F_X(\varphi^{-1}(x)) = F_X\left(\ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)\right) \\ &= \frac{1}{1 + \exp\left(-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{x + 1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Au final, on a } F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x + 1}{2}, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}([-1; 1])$ et on peut donc conclure que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1; 1])$.

- (d) Notons $V = 2U - 1$ et observons que $V(\Omega) = [-1, 1]$. Ainsi $F_V(x) = 0$ si $x < -1$ et $F_V(x) = 1$ si $x > 1$. Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = P(2U - 1 \leq x) = P\left(U \leq \frac{x + 1}{2}\right) = F_U\left(\frac{x + 1}{2}\right) \\ &= \frac{x + 1}{2} \end{aligned}$$

car si $x \in [-1, 1]$ alors $(x + 1)/2 \in [0; 1]$. On reconnaît encore l'expression de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([-1; 1])$ et on a bien le résultat demandé.

- (e) C'est un processus classique de simulation par inversion. On va simuler U (avec `rd.random()`) puis simuler V grâce à la question précédente et $\varphi^{-1}(V)$ renverra une simulation de X toujours d'après les questions précédentes.

```
def simul_X( ):
    U=rd.random()
    V=2*U-1
    return np.log((1+V)/(1-V))
```

7. (a) Cette intégrale est impropre en $+\infty$. Sur $[0; 1]$ il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue. On ne s'intéresse donc à la convergence que de l'intégrale sur $[1, +\infty[$. Or, par croissance comparée, il est immédiat de voir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$t^k f(t) = \frac{t^k e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} \sim t^k e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \rightarrow +\infty$$

et bien sûr, par critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Par critère de comparaison par négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on a bien convergence de l'intégrale étudiée.

- (b) On sait que

$$X \text{ admet une espérance} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \text{ converge absolument}$$

Or, comme f est paire, la fonction $t \mapsto t f(t)$ est impaire. On sait par la question précédente que l'intégrale, sur $[0; +\infty[$ de $t f(t)$ converge. On peut donc conclure que $E(X)$ existe et que

$$E(X) = 0.$$

- (c) Les commandes proposées créent une liste de 1000 simulations de X et affichent la moyenne des valeurs obtenues. Il s'agit donc d'une valeur approchée de l'espérance de X , qu'on sait être égale à 0. La valeur affichée devrait donc être très proche de 0.

Partie 2 : Etude d'une convergence en loi

8. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$F_{T_n}(t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t)$$

par indépendance. Alors

$$F_{T_n}(t) = \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right)^n$$

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

$$P(U_n \leq x) = P(T_n \leq x + \ln(n)) = \left(\frac{1}{1 + e^{-x - \ln(n)}} \right)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{e^{-x}}{n}} \right)^n = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n} \right)^{-n}$$

- (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$P(U_n \leq x) = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$, $\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim \frac{e^{-x}}{n}$, donc $-n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim -e^{-x}$. Ainsi (U_n) converge en loi vers une variable aléatoire X de fonction de répartition définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = e^{-e^{-t}}$$

Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonction C^1 . Donc X est à densité de densité :

$$f(t) = e^{-t} e^{-e^{-t}}$$

Partie 3 : Variables aléatoires symétriques

Une variable aléatoire (discrète ou à densité) Z est dite symétrique si elle suit la même loi que la variable aléatoire $-Z$.

10. Soit Z une variable aléatoire de densité g paire. Alors, en effectuant le changement de variable affine (donc licite) $u = -t$ qui donne $du = -dt$, on a

$$\begin{aligned} F_{-Z}(x) &= P(-Z \leq x) = P(Z \geq -x) \\ &= \int_{-x}^{+\infty} g(t) dt = \int_x^{-\infty} g(-u)(-du) \\ &= \int_{-\infty}^x g(u) du \quad (\text{car } g \text{ est paire}) \\ &= P(Z \leq x) = F_Z(x) \end{aligned}$$

et $-Z$ suit bien la même loi que Z ce qui veut dire que Z est symétrique.

11. (a) Si $Z = a$ est une v.a constante symétrique alors $-Z = -a = Z = a$ et $a = 0$. Réciproquement, il est clair que la v.a constante nulle est symétrique. C'est la seule variable aléatoire constante symétrique.
 (b) Pour chercher ce type d'exemple, on commence par raisonner avec des choses simples. On veut une variable aléatoire finie mais pas constante. On va donc chercher une v.a X prenant 2 valeurs a et b , comme on veut que $-X$ ait la même loi (et donc le même univers image) que X , il faut que $\{-a; -b\} = \{a, b\}$. On pense tout de suite à prendre $a = -1$ et $b = 1$. Ensuite on veut

$$P(X = 1) = P(-X = 1) = P(X = -1)$$

Ceci impose la probabilité ci-dessus soit égale à $1/2$ et donc que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$. Il est immédiat de vérifier que cette loi satisfait bien la définition de v.a symétrique.

- (c) Bien entendu on a tout de suite, dès la définition, pensé à la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Sa fonction de densité étant paire, elle vérifie bien la définition de variable aléatoire symétrique.
 12. (a) Soit Z une variable aléatoire symétrique. Comme

$$[Z \neq 0] = [Z < 0] \cup [Z > 0]$$

et que cette union est disjointe, on a

$$P(Z = 0) = 1 - P(Z \neq 0) = 1 - (P(Z < 0) + P(Z > 0)) = 1 - 2P(Z > 0)$$

car Z est symétrique : en effet, $P(Z < 0) = P(-Z > 0) = P(Z > 0)$. Il suit bien que

$$P(Z > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(Z = 0))$$

- (b) On suppose que Z est une variable aléatoire symétrique, à densité. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$P(Z \leq -x) = P(-Z \geq x) = 1 - P(-Z < -x) = 1 - P(Z < x) = 1 - P(Z \leq x)$$

car Z et $-Z$ suivent la même loi et sont à densité.

13. (a) Notons que Z et ε étant indépendantes, les variables $|Z|$ et ε le sont encore par le lemme des coalitions. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[\varepsilon = 1], [\varepsilon = -1]\}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(\varepsilon|Z| \leq x) &= P(\varepsilon|Z| \leq x \cap [\varepsilon = 1]) + P(\varepsilon|Z| \leq x \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P(|Z| \leq x \cap [\varepsilon = 1]) + P(-|Z| \leq x \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P(|Z| \leq x)P(\varepsilon = 1) + P(|Z| \geq -x)P(\varepsilon = -1) \quad \text{par indépendance de } \varepsilon \text{ et } |Z| \\ &= \frac{1}{2}(P(|Z| \geq -x) + P(|Z| \leq x)) \end{aligned}$$

ce qui est la formule demandée.

- (b) Commençons par voir que

$$P(|Z| \geq -x) = P(Z \geq -x) + P(Z \leq x) = P(-Z \leq x) + P(Z \leq x) = 2P(Z \leq x)$$

car Z est symétrique. De plus, toujours car Z est symétrique,

$$P(|Z| \leq x) = P(Z \leq x) - P(Z < -x) = P(Z \leq x) - 1 + P(Z \leq x) = 2P(Z \leq x) - 1.$$

On distingue alors deux cas :

- Si $x \geq 0$, alors $P(|Z| \geq -x) = 1$, et il suit que

$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = \frac{1}{2}(P(|Z| \geq -x) + P(|Z| \leq x)) = \frac{1}{2}(1 + 2P(Z \leq x) - 1) = P(Z \leq x).$$

- Si $x < 0$, alors $P(|Z| \leq x) = 0$ et

$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = \frac{1}{2}(P(|Z| \geq -x) + 0) = \frac{1}{2}(2P(Z \leq x)) = P(Z \leq x)$$

Dans les deux cas

$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = P(Z \leq x)$$

et on conclut Z et $\varepsilon|Z|$ suivent la même loi.

14. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par la FPT appliquée au s.c.e $\{[\varepsilon = 1], [\varepsilon = -1]\}$,

$$\begin{aligned} P(\varepsilon X \leq x) &= P([\varepsilon X \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([\varepsilon X \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P([X \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([X \geq -x] \cap [\varepsilon = 1]) \\ &= \frac{1}{2}(F_X(x) + 1 - F_X(-x)) \end{aligned}$$

Comme X est à densité, F_X est continue partout et de classe $\mathcal{C}^1$ partout (sauf peut être en un nombre fini de point). Par composition avec $x \mapsto -x$ et par somme, il en est donc de même pour $F_{\varepsilon X}$ et la variable εX est donc à densité. Une densité s'obtient par

$$f_{\varepsilon X}(x) = F'_{\varepsilon X}(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)).$$

Notamment cette densité est paire. Comme X admet une densité et que X est à valeurs positives, on sait que $f(t) = 0$ si $t < 0$ et que

$$\int_0^{+\infty} tf(t)dt$$

converge. Observant maintenant que $t \mapsto tf_{\varepsilon X}(t)$ est impaire et que, pour $t \geq 0$

$$tf_{\varepsilon X}(t) = \frac{1}{2}tf(t)$$

on a donc la convergence de $\int_0^{+\infty} t f_{\varepsilon X}(t) dt$ ou encore l'existence de $E(\varepsilon X)$ qui vaut donc 0.

On pouvait l'anticiper, l'espérance du produit de variables indépendantes est égale au produit des espérances, mais bien sûr $E(\varepsilon) = 0$. Sauf que... ce résultat est vrai si les deux variables sont toutes deux discrètes (ou toutes deux continues)....

- (b) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité telle que $|Z|$ admet une espérance. D'après la question précédente, en prenant $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ indépendante de Z (et donc indépendante de $|Z|$ par le lemme des coalitions), $\varepsilon|Z|$ admet une espérance qui est nulle. Or on a vu plus haut que $\varepsilon|Z|$ et Z ont dans ce cas la même loi, donc Z admet une espérance et celle-ci est nulle.

15. Encore une fois, on passe par la fonction de répartition de W et la formule des probabilités totales avec le même s.c.e que précédemment. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, on a $W(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_W(x) &= P(W \leq x) = P([\varepsilon Y \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([\varepsilon Y \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P([Y \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([-Y \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= \frac{1}{2}(P(Y \leq x) + 1 - P(Y \leq -x)) \end{aligned}$$

Il faut alors distinguer $x \geq 0$ et $x < 0$.

- Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ et $P(Y \leq -x) = 0$ ce qui donne

$$F_W(x) = \frac{1}{2} (2 - e^{-\lambda x})$$

- Si $x < 0$ alors $-x > 0$ et $P(Y \leq x) = 0$ ce qui donne

$$F_W(x) = \frac{1}{2} (e^{\lambda x})$$

Bilan

$$F_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} (2 - e^{-\lambda x}), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On commence par bien dire que F_W est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ pour garantir que W est une variable à densité. On vérifie qu'elle est symétrique

$$P(-W \leq x) = P(W \geq -x) = 1 - P(W \leq -x)$$

On distingue encore $x \geq 0$ et $x < 0$.

- Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ et on a

$$P(-W \leq x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}$$

- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et on a

$$P(-W \leq x) = 1 - \frac{1}{2} (2 - e^{\lambda x}) = \frac{1}{2} e^{\lambda x}$$

Dans les deux cas, $F_{-W}(x) = F_W(x)$ et W est bien symétrique.

Une densité de W est donnée par

$$h(x) = F'_W(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

16. Oui, il est immédiat de voir que la fonction h est encore paire.

Problème

Partie I : Réduction d'une matrice carrée

3. D'après l'affichage Python : $A^3 = A$.

4. D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de A . Or,

$$P(X) = X(X^2 - 1) = X(X - 1)(X + 1)$$

On en déduit que

$$\text{Sp}(A) \subset \{ \text{racines de } P(X) \} = \{-1, 0, 1\}$$

Ainsi, les valeurs propres possibles de A sont $-1, 0$ et 1 .

5. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_{-1}(A) &\iff (A + I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ 8y + 4z = 0 \quad L_3 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ 2y + z = 0 \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2y = -2z \\ 2y = -z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x = -3z \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2y = -z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = -\frac{1}{2}z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc -1 est valeur propre de A . De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre $E_{-1}(A)$
- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul donc $\mathcal{F}_{-1}$ est une base de $E_{-1}(A)$.

$$\begin{aligned}
U \in E_0(A) &\iff AU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2y - z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y = -z \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = -3z \\ 2y = -z & L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_0(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{3}{2}z \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2}z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_0(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 0 est valeur propre de A . De plus, la famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre $E_0(A)$
- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\mathcal{F}_0$ est une base de $E_0(A)$.

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A - I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x & +2z = 0 \\ -2x & -4z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x & +2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -2z \quad \text{et} \quad y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_1(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 1 est valeur propre de A . De plus, la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

? engendre $E_1(A)$

- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\mathcal{F}_1$ est une base de $E_1(A)$.

Les valeurs propres possibles de A sont $-1, 0, 1$ et on a vérifié que chacune d'elles est une valeur propre de A . Donc

$$\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$$

6. La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. Ainsi, il existe

- une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres de A
- une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A

telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base, on a

bien $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

5. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \alpha_n M &= \alpha_n \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_n a & \alpha_n b & \alpha_n c \\ \alpha_n d & \alpha_n e & \alpha_n f \\ \alpha_n g & \alpha_n h & \alpha_n i \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \ell a & \ell b & \ell c \\ \ell d & \ell e & \ell f \\ \ell g & \ell h & \ell i \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \ell M \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} M_n + M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n + a'_n & b_n + b'_n & c_n + c'_n \\ d_n + d'_n & e_n + e'_n & f_n + f'_n \\ g_n + g'_n & h_n + h'_n & i_n + i'_n \end{pmatrix} \\ &\quad \longrightarrow \begin{pmatrix} a + a' & b + b' & c + c' \\ d + d' & e + e' & f + f' \\ g + g' & h + h' & i + i' \end{pmatrix} = M + M' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n a'_n + b_n d'_n + c_n g'_n & a_n b'_n + b_n e'_n + c_n h'_n & a_n c'_n + b_n f'_n + c_n i'_n \\ d_n a'_n + e_n d'_n + f_n g'_n & d_n b'_n + e_n e'_n + f_n h'_n & d_n c'_n + e_n f'_n + f_n i'_n \\ g_n a'_n + h_n d'_n + i_n g'_n & g_n b'_n + h_n e'_n + i_n h'_n & g_n c'_n + h_n f'_n + i_n i'_n \end{pmatrix} \\ &\quad \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} aa' + bd' + cg' & ab' + be' + ch' & ac' + bf' + ci' \\ da' + ed' + fg' & db' + ee' + fh' & dc' + ef' + fi' \\ ga' + hd' + ig' & gb' + he' + ih' & gc' + hf' + ii' \end{pmatrix} = MM' \end{aligned}$$

devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. La matrice D étant diagonale, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n(D) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{k!} a^k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!} b^k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k!} c^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} a^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} b^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} c^k \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en reconnaissant des sommes partielles de séries exponentielles. Ainsi,

$$e^D \text{ existe et } e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$$

7. (a) On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $k \geq 3$, $M^k = M^3 M^{k-3} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} M^{k-3} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Finalement,

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, M^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } k = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 2 \\ \underline{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}} & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k && \text{par Chasles, car } n \geq 2 \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} M^k + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k!} M^k && \text{car } M^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \text{ si } k \geq 3 \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} M^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(S_n(M))$ est constante à partir du rang 2. On en déduit que

$$S_n(M) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$e^M \text{ existe et } e^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. (a) On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M$$

et

$$M^3 = M^2 M = (3M)M = 3M^2 = 3(3M) = 3^2 M$$

(b) D'après la question précédente, on conjecture que $M^k = 3^{k-1} M$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$

où $\mathcal{P}(k) : M^k = 3^{k-1} M$.

Initialisation :

D'une part, $M^1 = M$. D'autre part, $3^{1-1} M = 3^0 M = M$. D'où $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= MM^k \\ &= M \left(3^{k-1} M \right) \\ &= 3^{k-1} M^2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3^{k-1} (3M) && \text{cf la question 6.a)} \\ &= 3^k M \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 3^{k-1} M$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k && \text{par Chasles, car } n \geq 1 \\ &= M^0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} M^k \\ &= I + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 3^{k-1} M \\ &= I + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} 3^k M \\ &= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!} \right) M \\ &= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \end{aligned}$$

Vérifions que cette égalité est valable pour $n = 0$.

- D'une part, $S_0(M) = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} M^k = \frac{1}{0!} M^0 = I$
- D'autre part, $I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^0 \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M = I + \frac{1}{3} (1 - 1) M = I$

(d) On reconnaît une somme partielle de série exponentielle, d'où

$$\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} (e^3 - 1)$$

D'après la question 3.a),

$$\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^3 - 1}{3} M$$

puis, d'après la question 3.b),

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

Donc

$$e^M \text{ existe et } e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

9. (a) D'après la question 2.b), $A = PDP^{-1}$. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 S_n(tA) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (tA)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} PD^kP^{-1} \\
 &= P \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} D^k \right) P^{-1} \\
 &= P \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (tD)^k \right) P^{-1} \\
 &= PS_n(tD)P^{-1}
 \end{aligned}$$

- (b) On remarque que la matrice tD est diagonale et, plus précisément,

$$tD = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

D'après la question 4, la matrice e^{tD} existe et vaut

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Ceci veut exactement dire que

$$S_n(tD) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

D'après la question 3.b) et la question précédente, on a alors

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Pe^{tD}P^{-1}$$

On en déduit que e^{tA} existe et $e^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$ avec

$$\Delta(t) = e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

10. Raisonnons par équivalence :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - 3z(t) \end{cases}$$

$\iff X$ est solution de (S)

11. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (u, v, w) \text{ est un \u00e9tat d'\u00e9quilibre de } (S) &\iff A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E_0(A) \\ &\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{cf question 2.a)} \end{aligned}$$

On en d\u00e9duit que l'ensemble des \u00e9tats d'\u00e9quilibre de (S) est

$$\text{Vect}((3, 1, -2)) = \{\lambda(3, 1, -2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

12. Notons $W = X(t_0) = Y(t_0)$. Sous ces hypoth\u00e8ses, X et Y sont deux solutions du m\u00eame probl\u00e8me de Cauchy :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} Z'(t) = AZ(t) \\ Z(t_0) = W \end{cases}, \quad \text{d'inconnue } Z$$

Or, tout probl\u00e8me de Cauchy admet une unique solution. On en d\u00e9duit que $X = Y$, i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = Y(t)$.

13. La matrice A est diagonalisable (cf question 2.b)) et on a montr\u00e9 \u00e0 la question 2.a) que (U_{-1}, U_0, U_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ form\u00e9e de vecteurs propres de A . D'apr\u00e8s le cours, les solutions de (S) sont toutes de la forme

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta e^{0t} U_0 + \gamma e^t U_1 \\ &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \end{aligned}$$

o\u00f9 $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

14. (a) i. On consid\u00e8re une solution X quelconque de (S) :

$$X(t) = \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1$$

$$X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_1) \iff X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ \alpha + \beta = 4 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = -8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ -\beta + 2\gamma = -1 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ \beta - \gamma = 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ -\beta + 2\gamma = -1 \\ \gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 9 \\ -\beta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_1(t) = 3e^{-t}U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

ii. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

donc $x_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 3$, $y_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ et $z_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -2$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente, de point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$. D'après la question **g**, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel (S) .

(b) i. On considère une solution X quelconque de (S) :

$$X(t) = \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1$$

$$X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_2) \iff X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 3 \\ \alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 3 \\ -\beta + 2\gamma = 1 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ \beta - \gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 3 \\ -\beta + 2\gamma = 1 \\ \gamma = 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \quad \text{par remontées successives}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_2(t) = e^{-t}U_{-1} + U_0 + e^t U_1 = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}$$

ii. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $z_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

(c) La figure 4 est la seule où l'on a $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution X_2 .

- Dans la figure 3, on a $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution X_1 .
- Dans la figure 1, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution X_1 donc cette figure ne correspond pas à X_1 .
- Par élimination, la figure 2 correspond à la solution X_1 . De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que $x_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 3$, $y_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ et $z_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -2$.

15. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 e^{tA}C &= Pe^{tD}P^{-1}P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
 &= Pe^{tD} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
 &= P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
 &= P \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta \\ \gamma e^t \end{pmatrix} \\
 &= P \left(\alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \alpha e^{-t} P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^t P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \\
 &= X(t)
 \end{aligned}$$

cf question 7.b)

où l'on a utilisé le fait que P est précisément la matrice obtenue en concaténant les vecteurs colonnes U_{-1}, U_0 et U_1 .

(b) Considérons une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 1 :

$$y' = ay$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre.

D'après le cours, les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y(t) = ce^{at}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on a montré à la question précédente que les solutions de $X' = AX$ admettaient une «formule exponentielle» analogue : $c \in \mathbb{R}$ est analogue à $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (paramètre(s) à choisir) et e^{at} est analogue à e^{tA} .