COMPOSITE n°1

E C G

CONCOURS BLANC

Option économique

MATHEMATIQUES

11 Mars 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n°1

On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{5}\left(x^2\left(1-x^2\right)+y^2\left(1-y^2\right)+2xy\right)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient $\nabla f(x,y)$ ainsi que sa matrice hessienne $\nabla^2 f(x,y)$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet trois points critiques dont on précisera les coordonnées.
3. On joint ci-après deux figures (appelées respectivement Figure 1 et 2) relatives à la fonction f.
   (a) Que représente chacune de ces figures ?
   (b) Que ces figures permettent-elles de conjecturer quant à la nature des points critiques précédents ?

Figure 1

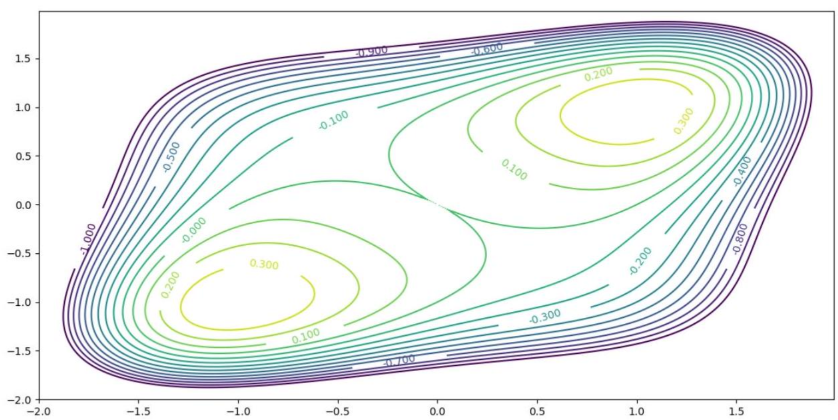
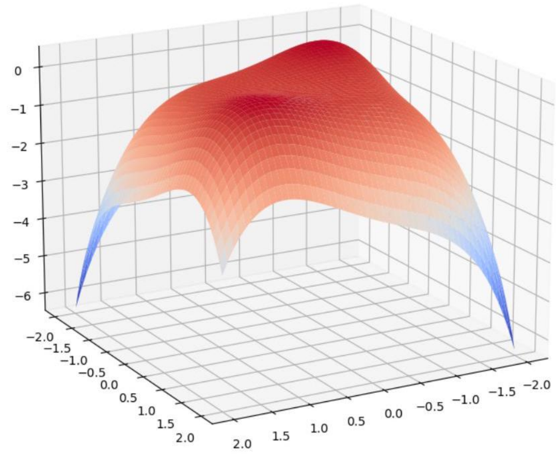
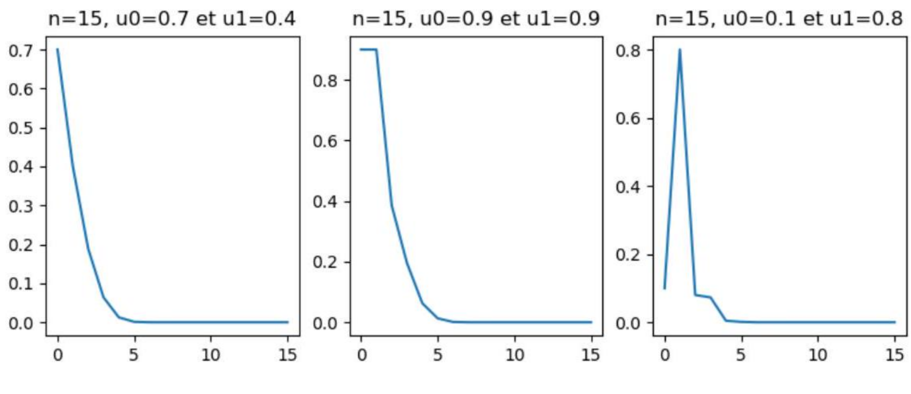


Figure 2



4. Déterminer la nature de chacun des points critiques. Pour l'un des trois points critiques, on pourra calculer $f(x,x)$ et $f(x,-x)$.
5. Montrer que f n'est pas minorée.
6. Posons $g : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{2t}{5} - \dfrac{t^2}{10}$.
   (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. Préciser le ou les extrema de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(x,y) \leq g\left(x^2+y^2\right)$.
   (c) Que peut-on en conclure quant au caractère global de certains des extrema de f trouvés précédemment ?

   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_0, u_1) \in [0;1]^2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f\left(u_n, u_{n+1}\right)$.
7. (a) Écrire une fonction en Python d'en-tête `def suite(n, u0, u1):` qui prend en argument un entier naturel n ainsi que les valeurs initiales u_0 et u_1 et qui renvoie un vecteur contenant $u_0, u_1, \ldots, u_n$.
   (b) Écrire une fonction en Python d'en-tête `def figure(n, u0, u1):` (qui utilise la précédente) qui prend en argument un entier naturel n ainsi que les valeurs initiales u_0 et u_1 et qui représente graphiquement les points $(0,u_0), (1,u_1), \ldots, (n,u_n)$.
   (c) On obtient alors, avec la fonction de la question précédente les figures ci-dessous, pour différentes valeurs de u_0 et u_1. Que peut-on conjecturer ?



8. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = u_0, a_1 = u_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{2}{5}\left(a_n + a_{n+1}\right)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \dfrac{2}{5}\left(u_n + u_{n+1}\right)$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a_n$.
   (d) Justifier qu'il existe des réels s, t, λ, μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda s^n + \mu t^n$. (On explicitera s et t mais pas λ et μ.)
   (e) Montrer la conjecture de la Question 7c.

Exercice n°2

Partie 1 : Étude d'une variable aléatoire à densité

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

1. Montre que f est paire.
2. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1+e^{-x}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et préciser sa valeur.
3. En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite de cette section, on note X une variable aléatoire ayant f pour densité.
4. Donner l'expression de la fonction de répartition F_X de X.
5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, F_X(x) = 1 - F_X(-x)$. Quelle loi usuelle du cours admet une fonction de répartition vérifiant la même propriété ?
6. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
   (a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et dresser ton tableau de variations, limites comprises.
   (b) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à préciser et déterminer l'expression de sa bijection réciproque φ^{-1}.
   (c) On définit la variable aléatoire Y par $Y = \varphi(X)$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$.
   (d) Montrer que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$, alors $2U-1 \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$.
   (e) Déduire des questions précédentes l'écriture d'une fonction Python d'en-tête `def simul_X( ) :` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X. On supposera les importations habituelles déjà effectuées.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

7. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k f(t)\mathrm{d}t$ converge.
   (b) Déduire des questions précédentes que X admet une espérance et préciser sa valeur.
   (c) On suppose écrite avec succès la fonction Python de la Question (6e). Que devrait afficher l'exécution des commandes ci-dessus ? Justifier la réponse.

```
ech=[simul_X( ) for k in range(1000)]

print(np.mean (ech))
```

Partie 2 : Etude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

8. (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(U_n \leqslant x) = \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
9. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Partie 3 : Variables aléatoires symétriques

Une variable aléatoire (discrète ou à densité) Z est dite symétrique si elle suit la même loi que la variable aléatoire $-Z$.

10. Montrer que si Z est une variable aléatoire ayant pour densité une fonction g paire, alors Z est symétrique.
11. (a) À quelle condition nécessaire et suffisante une variable aléatoire presque sûrement constante est symétrique.
    (b) Donner une exemple de variable aléatoire discrète (ou finie) symétrique non presque sûrement constante.
    (c) Quelle loi usuelle à densité du cours est symétrique ?
12. (a) Soit Z une variable aléatoire symétrique. Montrer que
$$P(Z > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(Z = 0))$$
    (b) On suppose que Z est une variable aléatoire symétrique, à densité. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une relation entre $P(Z \leq x)$ et $P(Z \leq -x)$.
13. Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité, de fonction de répartition F_Z. On considère une variable aléatoire finie ε de loi $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1;1\})$ supposée indépendante de Z.
    (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = \frac{1}{2}(P(|Z| \geq -x) + P(|Z| \leq x))$$
    (b) En déduire que Z et $\varepsilon|Z|$ suivent la même loi.
14. (a) Soient X une variable aléatoire à densité à valeurs positives admettant une espérance et $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1;1\})$ supposée indépendante de X. Montrer que εX est encore une variable à densité, de densité paire. Que dire de $E(\varepsilon X)$?
    (b) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité telle que $|Z|$ admet une espérance. Montrer que Z admet une espérance et que celle-ci est nulle.
15. Soient $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1;1\})$ supposées indépendantes. On note $W = \varepsilon Y$.
    (a) Montrer que W est une variable aléatoire symétrique à densité, de densité h à préciser.
    (b) La fonction h est-elle paire ?

Problème 1

Partie 1 : Réduction d'une matrice carrée

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On fournit le code Python dont le résultat de l'exécution est fourni ci-après.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

Affichage Python

```
»>[[2,-2,2]
[1,1,2]
[-2,0,-3]]
```

2. Déduire de l'affichage Python ci-dessus une égalité entre deux matrices.
3. Quelles sont alors les seules valeurs propres possibles de A ?
4. Déterminer le spectre de A.
5. Déterminer une matrice D diagonale dont les coefficients sont rangés dans l'ordre croissant et une matrice P inversible de première ligne $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$.
6. Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a $A^k = PD^kP^{-1}$.

Partie 2 : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si (M_n) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix}$$

on dit que la suite de matrices (M_n) admet une limite coefficient par coefficient, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$$

Lorsque $(S_n(M))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

5. Deux premiers résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de cette partie pour les démonstrations.
   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que
   $$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$
   (b) Soient (M_n) et $\left(M'_n\right)$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient, notées respectivement M et M'.
   Montrer que la suite de matrices $\left(M_n M'_n\right)$ admet une limite coefficient par coefficient et que
   $$\lim_{n\to+\infty} M_n M'_n = MM'$$
6. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonale, alors e^D existe et vaut $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$.
7. Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer M^2 et M^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer M^k.

(b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

8. Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer M^2.

(b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}$ l'expression de M^k en fonction de k.

(c) Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M$$

(d) En déduire que e^M existe et que

$$e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

9. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie 1 et on fixe un réel t.

(a) Déduire de la Question (4) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

(b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $e^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$. On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t.

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie 3 : Application à un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - 3z(t) \end{cases}$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions définies de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

10. Montrer que X est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$ où A est la matrice introduite dans la Partie 1.

11. Le système différentiel $(\mathcal{S})$ possède-t-il des équilibres ? Si oui, les déterminer.

12. Montrer que les solutions du système différentiel $(\mathcal{S})$ peuvent s'écrire sous la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t$$

où α, β, γ sont des constantes réelles et $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. On considère les problèmes de Cauchy

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_2) \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(a) i. Déterminer l'unique solution X_1 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$.

ii. Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point vis-à-vis du système linéaire $(\mathcal{S})$?

(b) i. Déterminer l'unique solution X_2 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$.

ii. Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

(c) On a représenté ci-après les tracés de quatre solutions du système $(\mathcal{S})$. Expliciter quelles figures sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-avant. Justifier la réponse.

Figure 1

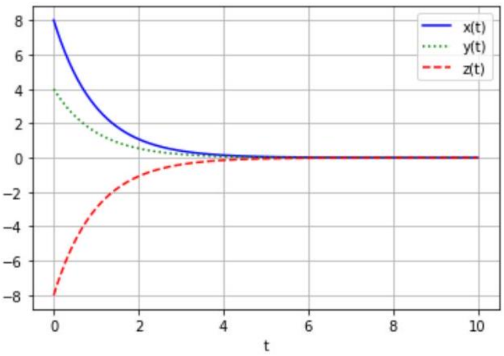


Figure 2

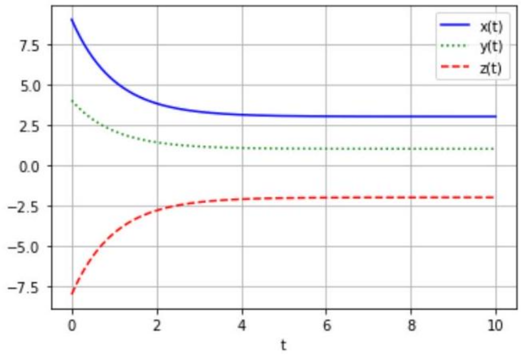


Figure 3

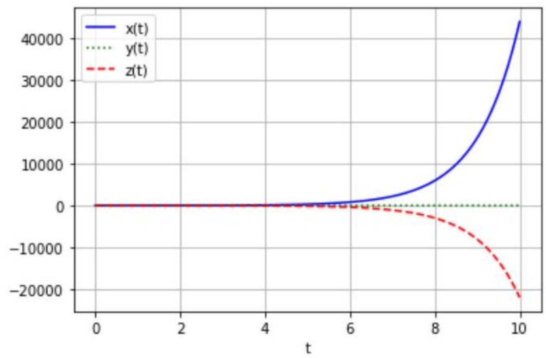
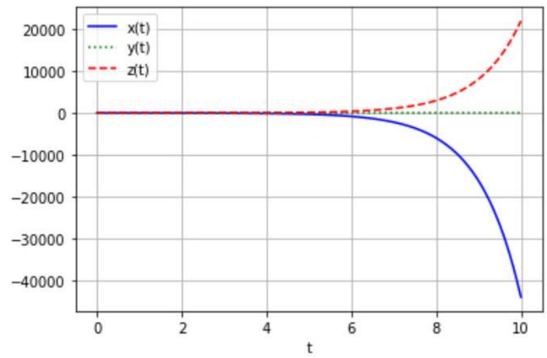


Figure 4



14. On reprend les notations de la Question (3) et on considère une solution X de $(\mathcal{S})$ de la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t$$

(a) Expliciter e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) En posant $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, montrer que $X(t) = e^{tA} \cdot C$.

(c) Commenter le résultat de la dernière question, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles du premier ordre à coefficient constant.