CONCOURS BLANC

Option économique

MATHEMATIQUES

11 Mars 2024

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Pour tout $x \neq 0 : e^x - 1 \neq 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues.

En $0 : e^x - 1 \sim x$ et donc pour $x \neq 0 : f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \rightarrow 1 = f(0)$

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$

- (b) Pour $x \neq 0 : e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions C^1 et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

- (c) On a le développement limité : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ donc pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \frac{-1/2x^2 + o(x^2)}{x(e^x - 1)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2x^2}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

- (d) En reprenant le développement limité,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1 - x \left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \right]}{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1 \right)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}{\left(x + x\varepsilon_2(x) \right)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{\left(1 + \varepsilon_2(x) \right)^2} \rightarrow -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} -\frac{1}{2}$

Comme f est continue en 0 et que $f'(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$ alors f est C^1 en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Conclusion : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

2. (a) $u(x) = (1-x)e^x - 1$
 u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-x)e^x - e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$		$\nearrow -$	0	$\searrow -$	

- (b) Comme on, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x - 1)^2}$ alors f est du signe de $u(x) < 0$ pour $x \neq 0$.

Et pour $x = 0$: $f'(x) = -\frac{1}{2} < 0$ alors

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

- (c) En $-\infty$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \rightarrow +\infty$

En $+\infty$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x(1 - 1/e^x)} \rightarrow 0$ car $x = o(e^x)$ et

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 1$	$\searrow 0$

- (d) En $-\infty$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e^x - 1} \rightarrow -1$
 et

$$\begin{aligned} f(x) + x &= \frac{x}{e^x - 1} + x \\ &= \frac{xe^x}{e^x - 1} \end{aligned}$$

avec $X = -x \rightarrow +\infty$ on a $xe^x = -X/e^X \rightarrow 0$ car $X = o(e^X)$ quand $X \rightarrow +\infty$

Donc $f(x) + x \rightarrow 0$

Conclusion : la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$

- (e) On attende le tracé de

- l'asymptote en $-\infty$,
- l'asymptote horizontale ($y = 0$) en $+\infty$
- et la tangente de pente $-\frac{1}{2}$ en $(0, 1)$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. 0 n'est pas point fixe puisque $f(0) \neq 0$

Pour $x \neq 0$: $f(x) = x \iff \frac{x}{e^x - 1} = x \iff 1 = e^x - 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$

Conclusion : f admet un point fixe et un seul, $\alpha = \ln(2)$

2. (a)

(b)

(c) Soit $g(x) = e^{2x} - 2x e^x - 1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x (e^x - 1 - x) \end{aligned}$$

soit $h(x) = e^x - 1 - x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$h'(x) = e^x - 1$$

On a donc

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	0	$\nearrow +$
$h(x)$	0	$\nearrow +$

et

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow +$

Conclusion : $\forall x \in [0; +\infty[, e^{2x} - 2x e^x - 1 \geq 0$

3. (a) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

(b) Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$ et $-\frac{1}{2} \leq f'(x)$

Et pour $x = 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2}$.

Enfin on a vu que $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc

Conclusion : $\forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

4. (a) On a donc $|f'(x)| = -f'(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

On montre alors, par récurrence, que pour tout $n : u_n \in \mathbb{R}^+$ (la récurrence est ici inutile car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$)

$u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \geq 1 : u_n = f(u_{n-1}) > 0$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, pour tout entier $n : u_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ et

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

(b) On montre alors par récurrence :

Pour $n = 0 : |u_0 - \alpha| = \frac{1}{2} |1 - \alpha| = \frac{1}{2} (1 - \alpha)$ car $\alpha = \ln(2) \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}} (1 - \alpha)$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$

5. Et comme $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$ alors $\frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \rightarrow 0$ et comme $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$, par encadrement $|u_n - \alpha| \rightarrow 0$ et

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha = \ln(2)$

6. Pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$, il faut calculer u_n (et n) jusqu'à ce que $|u_n - \ln(2)| < 10^{-9}$ (ce qui n'est pas le cas pour $n = 0$)

```
def suite :
    u=1
    n=0
    while np.qpbs(u-np.log(2))>10**(-9):
        n=n+1
        u=u/(np.exp(u)-1)
    return(n)
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

1. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet une primitive F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$.
On a alors $G(x) = F(2x) - F(x)$ et donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions C^1 .
et on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= 2\frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x-1} \text{ si } 2x \text{ et } x \neq 0 \\ &= \frac{4x - x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1} \\ &= \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \\ G'(0) &= 2f(0) - f(0) = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. (a) Soit $x \geq 0$. On a alors $x \leq 2x$ et pour tout $x \leq t \leq 2x : 0 \leq f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Donc } 0 \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = f(x)(2x - x)$$

Conclusion : $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq G(x) \leq x f(x)$.

- (b) Comme $x f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2}{e^x} \frac{1}{1 - e^{-x}} \rightarrow 0$, par encadrement :

Conclusion : $G(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

3. (a) Pour $x \leq 0$ on a $2x \leq x \leq 0$ et pour tout $2x \leq t \leq x : f(t) \geq f(x)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

D'où $\int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt = f(x)(2x - x)$ car les bornes sont en ordre décroissant.

Conclusion : $\forall x \in]-\infty; 0], G(x) \leq x f(x)$.

- (b) Comme $x f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \rightarrow -\infty$, par majoration,

Conclusion : $G(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$

4. On rassemble tout :

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\ln(3)$	$-$	$+\infty$
$e^{2x} - 1$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$		$\nearrow +$	
$3 - e^x$		$\searrow +$		$\searrow +$	0	$\searrow -$	
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$G(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$G(\ln 3)$	$\searrow$	0

Exercice 2

Partie I : Étude de a

- Montrons que a est linéaire. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P et Q deux éléments de E .
 $a(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q) - X(\alpha P + Q)' = (\alpha P + Q) - X(\alpha P' + Q') = \alpha(P - XP') + (Q - XQ')$
Ainsi, $a(\alpha P + Q) = \alpha a(P) + a(Q)$.
 - Montrons que a est à valeurs dans E . Soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ un polynôme de E .
 $a(P) = P - XP' = \alpha + \beta X + \gamma X^2 - X(\beta + 2\gamma X) = \alpha - \gamma X^2 \in E$.

Ainsi, a est un endomorphisme de E

- $a(1) = 1 - X \cdot 0 = 1$
 - $a(X) = X - X \cdot 1 = 0$
 - $a(X^2) = X^2 - X \cdot 2X = -X^2$

Ainsi, la matrice de a dans la base $(1, X, X^2)$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$(b) \operatorname{rg}(A) = \dim \left(\operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) = \dim \left(\operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) = 2. \text{ ainsi, } \operatorname{rg}(A) = 2$$

3. A est une matrice d'ordre 3 et $\operatorname{rg}(A) = 2$ donc A n'est pas inversible et donc a n'est pas bijectif.

- Déterminons $\operatorname{Ker}(a)$: Soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$
 $P \in \operatorname{Ker}(a) \Leftrightarrow a(P) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \gamma X^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0$
Ainsi, $P = \beta X$ et $\operatorname{Ker}(a) = \operatorname{Vect}\{X\}$
- Déterminons $\operatorname{Im}(a)$:
 $\operatorname{Im}(a) = \operatorname{Vect}\{a(1), a(X), a(X^2)\} = \operatorname{Vect}\{1, 0, -X^2\} = \operatorname{Vect}\{1, X^2\}$
Ainsi, $\operatorname{Im}(a) = \operatorname{Vect}\{1, X^2\}$

Partie II : Étude de b

4. b est un endomorphisme de E donc b est bijectif ssi $\operatorname{Ker}(b) = \{0\}$. Soit $P \in E, P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(b) &\Leftrightarrow b(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow P - P' = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha + \beta X + \gamma X^2 - (\beta + 2\gamma X) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha - \beta + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \gamma = \beta = \alpha = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(b) = \{0\}$ et b est bijectif.

De plus, notons g l'application définie par : $\forall Q \in E, g(Q) = Q + Q' + Q''$. g est un endomorphisme de E et :

$\forall P \in E, (g \circ b)(P) = g(P - P') = g(P) - g(P') = P + P' + P'' - (P' + P'' + P''')$. Or P est un polynôme

de degré inférieur ou égal à 2 donc $P''' = 0$.

ainsi, $\forall P \in E, (g \circ b)(P) = P$ De même, $\forall P \in E, (b \circ g)(P) = P$. Ainsi, $g = b^{-1}$.

On a alors : Pour tout Q dans $E, g^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$

5. (a) Déterminons la matrice B de b dans la base $(1, X, X^2)$.

- $b(1) = 1 - 0 = 1$
- $b(X) = X - 1$
- $b(X^2) = X^2 - 2X$

Ainsi, la matrice de b dans la base $(1, X, X^2)$ est : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : ainsi, B et donc b admet 1 comme unique valeur propre.

Ainsi, Spec(b) = {1}

(b) Raisonnons par l'absurde : puisque 1 est la seule valeur propre de b , si b était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $PBP^{-1} = I$ ce qui impliquerait $B = I$ ce qui est absurde!

Ainsi, b n'est pas diagonalisable.

Partie III : Étude de c

6. • $c(1) = 2X - (X^2 - 1).0 = 2X$
 • $c(X) = 2X.X - (X^2 - 1).1 = 1 + X^2$
 • $c(X^2) = 2X.X^2 - (X^2 - 1).2X = 2X$

Ainsi, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. La matrice C a deux lignes égales donc n'est pas inversible donc c n'est pas bijectif.

8. (a) Déterminons les valeurs propres et les sous-espaces propres de C .

- Recherchons les valeurs propres de C . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre de C ssi $C - \lambda I$ est non inversible. Or,

$$\begin{aligned} C - \lambda I &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2 - \lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} L_3 \leftarrow 2L_3 + \lambda L_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda + \lambda(2 - \lambda^2) \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - (2 - \lambda^2)L_2 \end{aligned}$$

Ainsi, λ est valeur propre de C ssi $2\lambda + \lambda(2 - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(4 - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = -2$ ou $\lambda = 0$.

Ainsi Spec(C) = $\{-2; 0; 2\}$. C est une matrice d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres donc elle est diagonalisable.

- Recherchons les sous-espace propres de C .

– Recherche de E_0 .

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$X \in E_0 \Leftrightarrow CX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b & = 0 \\ 2a + 2c & = 0 \\ b & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases} .$$

$$\text{Ainsi, } X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \text{ et } E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

– Recherche de E_2 .

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} X \in E_2 \Leftrightarrow CX = 2X &\Leftrightarrow \begin{cases} b & = 2a \\ 2a + 2c & = 2b \\ b & = 2c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -b + 2c = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 2c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } X = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ c \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

– Recherche de E_{-2} .

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} X \in E_{-2} \Leftrightarrow CX = -2X &\Leftrightarrow \begin{cases} b & = -2a \\ 2a + 2c & = -2b \\ b & = -2c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -b - 2c = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -2c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } X = \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} \text{ et } E_{-2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Conclusion : Compte tenu des recherches de valeurs propres et sous-espaces propres précédents, si

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ alors } C = RDR^{-1}$$

(b) La matrice C est diagonalisable donc l'endomorphisme c l'est aussi et ses valeurs propres sont -2, 0 et 2.

En traduisant les sous-espaces propres trouvés dans la question précédentes dans la base $(1, X, X^2)$ on a :

$$E_0 = \text{Vect}(1 + X^2), \quad E_2 = \text{Vect}(1 + 2X + X^2), \quad E_{-2} = \text{Vect}(1 - 2X + X^2)$$

Partie IV : Étude de f

9. Soit $P \in E$, $f(P) = (b \circ a)(P) - (a \circ b)(P)$. Or,

- $(b \circ a)(P) = b(a(P)) = b(P - XP') = P - XP' - (P - XP')' = P - XP' - (P' - P' - XP'')$ donc $(b \circ a)(P) = P - XP' + XP''$
- $(a \circ b)(P) = a(b(P)) = a(P - P') = P - P' - X(P - P')' = P - P' - X(P' - P'')$ donc $(a \circ b)(P) = P - (1 + X)P' + XP''$

Ainsi, $f(P) = P - XP' + XP'' - (P - (1 + X)P' + XP'') = P'$ et $\boxed{\forall P \in E, f(P) = P'}$

10. On a alors, $\forall P \in E$, $(f \circ f)(P) = P''$ puis $(f \circ f \circ f)(P) = P''' = 0$; ainsi, $f^3 = 0$.

Or la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$ est la matrice $BA - AB$, puisque B est la matrice de b et A celle de a .

Ainsi, $f^3 = 0 \Rightarrow (BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 3

Partie A

1. Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, la variable X_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Et donc : $E(X_k) = \frac{n+1}{2}$.

2. (a) Si la première boule tirée est la boule numéro n , on a $T_n = 1$.

Comme $S_n = \sum_{i=1}^n \underbrace{X_i}_{\geq 1} \geq n$, la variable T_n ne peut pas prendre de valeur strictement supérieure à n .

Enfin, toute valeur intermédiaire est possible : si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, alors la suite de tirages

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(k-1) \text{ premiers tirages}}, \overbrace{(n-k+1)}^{k\text{-ème tirage}} \quad (\text{par exemple})$$

donne $T_n = k$ (puisque $S_{k-1} = k-1 < n$ et $S_k = n$).

(b) La seule possibilité pour avoir $S_1 \geq n$ est de tirer la boule numéro n au premier tirage (et on aura alors en fait $S_1 = n$) :

$$(T_n = 1) = (X_1 = n).$$

Puisque X_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(T_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

(c) L'événement $(T_n = n)$ est égal à :

$$\begin{aligned} (S_{n-1} \leq n-1) \cap (S_n \geq n) &= \underbrace{\left(\overbrace{X_1 + \dots + X_{n-1}}^{\geq n-1} \leq n-1 \right)}_{\text{donc égalité partout}} \cap (S_n \geq n) \\ &= (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (S_n \geq n) \\ &= (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_1 + \dots + X_n \geq n) \\ &= (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1) \cap \underbrace{(X_n \geq 1)}_{\text{toujours vrai}} \\ &= (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1) \end{aligned}$$

Par indépendance de $X_1, \dots, X_{n-1}$ (les tirages sont avec remise) :

$$P(T_n = n) = \frac{1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. D'après la question 2 :

$$T_2(\Omega) = \{1, 2\} \quad ; \quad P(T_2 = 1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(T_2 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. D'après la question 2 :

$$T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\} \quad ; \quad P(T_3 = 1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{9}.$$

Et par conséquent :

$$P(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Calculons l'espérance de T_3 :

$$E(T_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9}.$$

Partie B

5. Comme déjà précisé en partie A pour S_n et S_{n-1} , la variable S_k vaut au minimum k et ceci se produit lorsque les k premiers tirages ont donné la boule numéro 1.

Elle vaut au maximum $n \times k$, situation qui se produit lorsque l'on tire k fois la boule numéro n .

Ceci prouve l'inclusion :

$$S_k(\Omega) \subset \llbracket k, nk \rrbracket.$$

On peut supposer que le correcteur se contentera de cette réponse, l'égalité étant un peu difficile à prouver. On peut par exemple procéder par récurrence sur $k \geq 1$ pour prouver l'inclusion réciproque : $\forall k \geq 1, \llbracket k, nk \rrbracket \subset S_k(\Omega)$.

- *Initialisation* : Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si le premier tirage donne la boule numéro i , alors $S_1 = X_1 = i$; donc : $\llbracket 1, n \rrbracket \subset S_1(\Omega)$.
- *Hérédité* : Supposons pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ fixé que $\llbracket k, nk \rrbracket \subset S_k(\Omega)$ et prouvons que $\llbracket k+1, n(k+1) \rrbracket \subset S_{k+1}(\Omega)$. Soit $i \in \llbracket k+1, n(k+1) \rrbracket$:
 - Si $i \leq kn$, alors $i-1 \in \llbracket k, nk \rrbracket$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une suite de k tirages $x_1, \dots, x_k$ telle que $S_k = x_1 + \dots + x_k = i-1$.
La suite de $(k+1)$ tirages $x_1, \dots, x_k, 1$ donne $S_{k+1} = i$.
 - Si $i \geq kn+1$, alors, par hypothèse de récurrence, il existe une suite de k tirages $x_1, \dots, x_k$ telle que $S_k = x_1 + \dots + x_k = kn$.
La suite de $(k+1)$ tirages $x_1, \dots, x_k, i-kn$ (on a bien $1 \leq i-kn \leq n$ car $kn+1 \leq i \leq kn+n$) donne $S_{k+1} = x_1 + \dots + x_k + i-kn = nk + i - kn = i$.

6. (a) On a immédiatement :

$$S_{k+1} = X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

(b) Soit $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{(S_k = j)\}_{j \in \llbracket k, nk \rrbracket}$ donne :

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{nk} P((S_{k+1} = i) \cap (S_k = j)) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P((S_k + X_{k+1} = i) \cap (S_k = j)) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P((X_{k+1} = i-j) \cap (S_k = j)) \end{aligned}$$

L'événement $(X_{k+1} = i-j)$ étant impossible si $i-j \notin \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut ne conserver dans cette somme que les termes tels que $1 \leq i-j \leq n$, c'est-à-dire (la deuxième des inégalités précédentes étant réalisée

car $i \leq n$) tels que $j \leq i - 1$, les autres termes étant nuls. Puisque $i - 1 \leq nk$ (car $i \leq n$ et $k \geq 1$), on a :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} P((X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j))$$

Enfin, les variables $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}$ étant indépendantes, le lemme des colations donne l'indépendance des deux variables $S_k = X_1 + \dots + X_k$ et X_{k+1} .

D'où avec la question 1. (X_{k+1} suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$) :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \underbrace{P(X_{k+1} = i - j)}_{=\frac{1}{n}} \times P(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$$

7. (a) La formule du triangle de Pascal s'écrit, pour $k, j \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouvons par récurrence sur i que :

$$\forall i \geq k + 1, \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- Initialisation : pour $i = k + 1$, la somme ne comporte qu'un seul terme : $\binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$.
- Hérité : Supposons, pour un entier $i \geq k + 1$ fixé que $\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$ et prouvons la formule pour $i + 1$:

$$\sum_{j=k}^{(i+1)-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^i \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} = \dots$$

Par hypothèse de récurrence et avec la formule de Pascal :

$$\dots = \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} = \binom{i}{k} = \binom{(i+1)-1}{k}.$$

La formule est ainsi prouvée pour $i + 1$.

(c) • Initialisation : $\mathcal{H}_1$ s'écrit

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(S_1 = i) = \frac{1}{n} \underbrace{\binom{i-1}{0}}_{=1} = \frac{1}{n}.$$

Comme $S_1 = X_1 \leftrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ d'après la question 1., ceci est vrai.

- Hérité : Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour un entier $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ fixé. Soit $i \in \llbracket k + 1, n \rrbracket$. D'après 6.(b) et par hypothèse de récurrence :

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1}$$

Et donc, d'après la question 7.(b) :

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k} = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{(k+1)-1}.$$

On a ainsi prouvé $\mathcal{H}_{k+1}$.

8. (a) L'événement $(T_n > k)$ signifie que la somme des numéros des boules obtenues est pour la première fois supérieure ou égale à n lors du tirage numéro ℓ avec $\ell > k$, autrement dit que lors du tirage numéro k , la somme des numéros des boules obtenues est *strictement* inférieure (négation de « supérieure ou égale ») à n , c'est-à-dire $(S_k < n) = (S_k \leq n - 1)$:

$$(T_n > k) = (S_k \leq n - 1).$$

- (b) En écrivant, avec une union d'événements incompatibles :

$$(T_n > k) = (S_k \leq n - 1) = \bigcup_{i=1}^{n-1} (S_k = i)$$

on obtient, avec 7.(c) puis 7.(b) :

$$P(T_n > k) = \sum_{i=1}^{n-1} P(S_k = i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

9. La variable aléatoire T_n ($T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$) étant finie, elle admet en effet une espérance et :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^n k P(T_n = k).$$

En écrivant, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(T_n = k) = P(T_n > k - 1) - P(T_n > k)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{k=1}^n k (P(T_n > k - 1) - P(T_n > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n k P(T_n > k - 1) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \\ &= \sum_{k=1}^n (k - 1 + 1) P(T_n > k - 1) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{(k - 1)}_{\substack{=0 \\ \text{pour } k=1}} P(T_n > k - 1) + \sum_{k=1}^n P(T_n > k - 1) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \\ &= \sum_{k=2}^n (k - 1) P(T_n > k - 1) + \sum_{k=1}^n P(T_n > k - 1) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $\ell = k - 1$ dans les deux premières sommes :

$$E(T_n) = \cancel{\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell P(T_n > \ell)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell) - \cancel{\sum_{k=1}^n k P(T_n > k)} = \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell).$$

Avec la question 8.(b), on a donc :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k}_{\text{par la formule du binôme de Newton}} \times 1^{(n-1)-k} = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^{n-1}$$

10. On va déterminer la limite de $E(T_n)$ en écrivant l'expression trouvée ci-dessus sous « forme exponentielle » :

$$E(T_n) = \exp\left((n-1) \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)\right)$$

Avec l'équivalent classique $\ln(1+u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ lorsque u est une suite qui converge vers 0 (ici $u_n = 1/n \rightarrow 0$) :

$$(n-1) \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n-1) \times \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$E(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \exp(1) = e.$$

Partie C

11. (a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^N P(Y = k) = \sum_{k=1}^N \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^N \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!}$$

Décalons les indices dans la première somme de sorte à pouvoir simplifier :

$$\sum_{k=1}^N P(Y = k) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{N!} = 1 - \frac{1}{N!} \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$$

On en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} P(Y = k)$ converge et que sa somme vaut 1.

(b) La question consiste ici à prouver la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} k P(Y = k)$ et à en calculer la somme. Pour $N \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^N k P(Y = k) = \sum_{k=1}^N k \underbrace{\frac{k-1}{k!}}_{=0 \text{ pour } k=1} = \sum_{k=2}^N k \frac{k-1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=2}^N \frac{1}{(k-2)!}}_{\text{changement d'indice}} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e$$

(on a reconnu la somme partielle de la série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ avec $x = 1$).

Par conséquent, T_n admet une espérance et $E(T_n) = e$.

12. Soit $k \in \mathbb{N}$. Reprenons l'expression obtenue en 8.(b) valable pour $n \geq k + 1$:

$$\begin{aligned} P(T_n > k) &= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k} \times \frac{(n-1)!}{k! (n-1-k)!} \\ &= \frac{\overbrace{\underbrace{(n-1)}_{\sim n} \underbrace{(n-2)}_{\sim n} \dots \underbrace{(n-k)}_{\sim n}}^{n \rightarrow +\infty} (n-1-k)!}_{n^k k! (n-1-k)!} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^k k!} = \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Cet équivalent étant indépendant de n , il s'agit de la limite :

$$P(T_n > k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{1}{k!}.$$

13. Les variables aléatoires T_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y étant discrètes, la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers Y équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(T_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P(Y = k).$$

C'est bien le cas puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'après 12. :

$$P(T_n = k) = P(T_n > k - 1) - P(T_n > k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!} = P(Y = k).$$

14.

```
def T(n):
    S = 0
    y = 0
    while S < n:
        tirage = rd.randint(1,n+1)
        S = S + tirage
        y = y + 1
    return(y)
```

15. (a) La fonction `freqT` renvoie un vecteur de taille n où chaque coordonnée numéro k est la fréquence empirique obtenue pour $(T_n = k)$ sur un échantillon de 100 000 simulations. Ce vecteur est représenté sur chaque graphique par les barres verticales.
La fonction `loitheoY` renvoie un vecteur de taille n où chaque coordonnée numéro k est la valeur (théorique) de $P(Y = k) = \frac{k-1}{k!}$ (`prod(1:k)` est le produit des entiers compris entre 1 et k , c'est-à-dire $k!$, et aurait pu aussi être écrit `factorial(k)`). Ce vecteur est représenté sur chaque graphique par les croix.
- (b) On observe sur ces graphiques que, plus n est grand, plus les extrémités supérieures des barres verticales sont proches des croix, c'est-à-dire que la loi empirique de T_n se rapproche de la loi de Y . Ceci illustre la convergence en loi $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ prouvée en question 13.