COMPOSITE n°2

E C G

CONCOURS BLANC

Option économique

MATHEMATIQUES

14 Mars 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n°1

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Etude de la fonction f.

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
   (c) Rappeler le développement limité de la fonction exponentielle en 0 à l'ordre 2, puis montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   (d) Montrer que $\lim_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ et en déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1 - x) e^x - 1$$

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) < 0$.
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et dresser le tableau des variations de f.
   (d) Montrer que la droite la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation $y = -x$ en $-\infty$.
   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe α, que l'on calculera.
2. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x$.
   (b) En déduire les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.
   (c) En déduire que $\forall x \in [0; +\infty[\,, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.
3. (a) Montrer $\forall x \in]0; +\infty[\,,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\ e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$
   (b) En déduire que $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
4. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$
5. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
6. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$$

1. Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ 0 \leq G(x) \leq x\ f(x)$.
   (b) En déduire la limite de G en $+\infty$.
3. (a) Montrer que $\forall x \in]-\infty; 0]\,,\ G(x) \leq x\ f(x)$.
   (Pour cela on remarquera que $2x \leq x$ et que $\forall t \in [2x, x] \quad f(t) \geq f(x)$)
   (b) En déduire la limite de G en $-\infty$.
4. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice n°2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.
Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$. Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$ et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \qquad b(P) = P - P', \qquad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$$

Par exemple, $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.
2. (a) Montrer que la matrice de A de a dans la base $\mathcal{B}$ de E est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer le rang de la matrice A.
3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.
5. (a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

   (b) L'endmorphisme b est-il diagonalisale ?

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?
8. (a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre 3, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

   (b) En déduire que l'endormophisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

Partie IV : Étude de f

9. Montrer que $\forall P \in E, \quad f(P) = P'$.
10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

Exercice n°3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathrm{P}(T_n = 1)$.
   (c) Montrer que :
$$\mathrm{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathrm{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   (b) En utilisation un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :
$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathrm{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathrm{P}(S_k = j).$$
7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\dbinom{j-1}{k-1}$, $\dbinom{j-1}{k}$ et $\dbinom{j}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:
$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$
   (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :
$$« \ \forall i \in [\![k, n]\!],\ \mathrm{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \ ».$$
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.
8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{P}(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que $\mathrm{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(T_n > k)$, puis que $\mathrm{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.
10. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variable $(T_n)_{n \geq 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

(a) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Y=k)=1$.

(b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$

13. Démontrer alors que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

14. On importe les bibliothèques suivantes : `import numpy as np`, import numpy.random as rd, import matplotlib.pyplot as plt.
On rappelle qu'en langage Python, l'instruction `rd.randint(1,n+1)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1,n]\!]$ selon la loi uniforme. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```
def T(n):
    S = ...
    y = ...
    while ... :
        tirage = rd.randint(1,n+1
        S = S + tirage
        y = ...
        return(y)
```

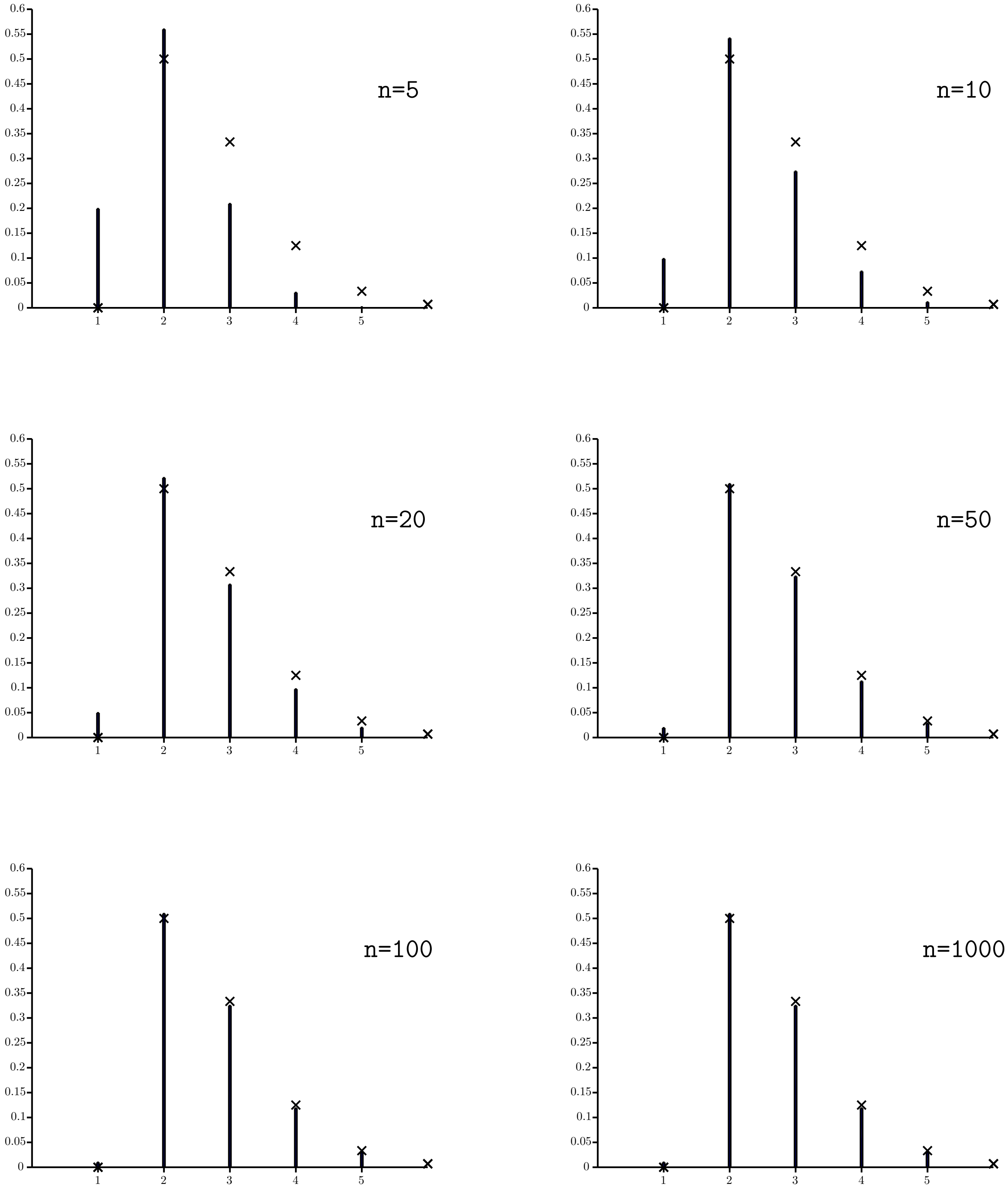
15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

```
def freqT(n):
    y = np.zeros(n)
    for i in range(10000):
        k = T(n)
        y[k-1] = y[k-1]+1
    y = y/10000
    return(y)

def loitheoY(n):
    y = []
    for k in range(1,n+1):
        y.append((k-1)/np.prod(np.arange(1,k+1)))
    return(y)

plt.clf()
n = int(input('n=?'))
plt.plot(range(1,7),loitheoY(6),'X')
x=[k for k in range(1,n+1)]
F = freqT(n)
plt.bar(range(1,6),F[0:5],width=0.2,color='orange')
plt.show()
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous :



(a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

(b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question 13.