Correction du Devoir Surveillé n° 0

10/09/22

Exercice 1 :

1. Développer et réduire l'expression $A = 2x^2 - (x+2)(3x-1)$.
2. Factoriser les expressions $B_1 = (2x+3)^2 - 2(4x+1)(2x+3)$ et $B_2 = 2x^2 + 7x - 4$.

1. Développer et réduire l'expression

$$\begin{aligned} A &= 2x^2 - (x+2)(3x-1) \\ &= 2x^2 - (3x^2 + 6x - x - 2) \\ &= 2x^2 - 3x^2 - 5x + 2 \\ &= \boxed{-x^2 - 5x + 2} \end{aligned}$$

2. Factoriser l'expression

$$\begin{aligned} B_1 &= (2x+3)^2 - 2(4x+1)(2x+3) \\ &= (2x+3)\left(2x+3-2(4x+1)\right) \\ &= (2x+3)(2x+3-8x-2) \\ &= \boxed{(2x+3)(-6x+1)} \end{aligned}$$

Pour B_2 on cherche les éventuelles racines du trinôme :

$$\Delta = 49 + 32 = 81 > 0$$

Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-7-9}{4} = -4 \qquad x_2 = \frac{-7+9}{4} = \frac{1}{2}$$

Ainsi la forme factorisée est $\boxed{B_2 = 2(x+4)(x - \frac{1}{2}).}$

Exercice 2 :

Écrire sous la forme la plus simple possible les fractions suivantes.

1. $C = \dfrac{(2x^2-x)(6-3x)}{3x(2-x)}$.
2. $D = -\dfrac{2x+4}{2x} \times \dfrac{x^2}{2+x}$.
3. $E = \dfrac{50}{49} \times \dfrac{49}{48} \times \ldots \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{1}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{(2x^2-x)(6-3x)}{3x(2-x)} \\ &= \frac{x(2x-1) \times 3 \times (2-x)}{3x(2-x)} \\ &= \boxed{2x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= -\frac{2x+4}{2x} \times \frac{x^2}{2+x} \\ &= -\frac{2(x+2)}{2x} \times \frac{x^2}{2+x} \\ &= \boxed{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{50}{49} \times \frac{49}{48} \times \ldots \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} \\ &= \frac{50}{\cancel{49}} \times \frac{\cancel{49}}{\cancel{48}} \times \ldots \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{1} \\ &= \boxed{50} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. Calculer et simplifier $\dfrac{3}{4(x+2)(x^2+1)} - \dfrac{x}{2(x^2+1)(x-1)}$.
2. On donne $A = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{1+t^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)$. Écrire AB sous la forme la plus simple possible.

1. On met au même dénominateur :
$$\frac{3}{4(x+2)(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)(x-1)} = \frac{3(x-1)-2x(x+2)}{4(x+2)(x^2+1)(x-1)} = \frac{3x-3-2x^2-4x}{4(x+2)(x^2+1)(x-1)}$$
$$\boxed{= \frac{-2x^2-x-3}{4(x+2)(x^2+1)(x-1)}}$$

2. On donne $A = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)$. On a alors
$$\begin{aligned} AB &= \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t^2}\right) \times (1+t^2)(1+t) \\ &= \frac{(1+t^2)(1+t)}{1+t} - \frac{(1+t^2)(1+t)}{1+t^2} \\ &= 1+t^2-(1+t) \\ &= \boxed{t^2-t.} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

1. Simplifier au maximum l'expression $F = (\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)$.
2. Simplifier l'expression : $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{27}}{\sqrt{75}}$.
3. Exprimer sous forme d'une fraction irréductible l'expression $H = \frac{x}{\sqrt{x}-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+4}$.

1. On calcule
$$\begin{aligned} F &= (\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3) \\ &= (\sqrt{5})^2 - 3^2 \\ &= 5-9 \\ &= \boxed{-4} \end{aligned}$$

2.
$$\frac{\sqrt{48}+\sqrt{27}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{16\times 3}+\sqrt{9\times 3}}{\sqrt{25\times 3}} = \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \boxed{\frac{7}{5}}$$

3. On calcule
$$\begin{aligned} H &= \frac{x}{\sqrt{x}-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+4} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} + \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \\ &= \boxed{\frac{x\sqrt{x}+4x+\sqrt{x}-4}{x-16}} \end{aligned}$$

Exercice 5 :

Écrire les expressions suivantes sous la forme x^a.

1. $I = \frac{x^3 \times x^{-2}}{x^5}$.
2. $J = \sqrt{x} \times \frac{x^2}{(-x)^4 x^{-1}}$.

$$I = \frac{x^3 \times x^{-2}}{x^5} = \frac{x}{x^5} = \boxed{x^{-4}}$$

$$J = \sqrt{x} \times \frac{x^2}{(-x)^4 x^{-1}} = x^{1/2} \times \frac{x^2 \times x}{x^4 \times (-1)^4} = x^{1/2} \times x^{-1} = x^{-1/2}$$

Exercice 6 :

Résoudre les équations suivantes par la méthode de votre choix.

1. $(2x+1)^2 - 25 = 0$.
2. $e^{x^2+4} = e^{4x}$.
3. $(\ln(x) - 1)(2 - 5\ln(x)) = 0$
4. $x^2 - 4x + 3 = 0$

1. On résout la première équation en factorisant

$$\begin{aligned}(1) &\iff (2x+1)^2 - 25 = 0 \\ &\iff (2x+1-5)(2x+1+5) = 0 \\ &\iff (2x-4)(2x+6) = 0\end{aligned}$$

Or $2x - 4 = 0 \iff x = 2$ et $2x + 6 = 0 \iff x = -3$ donc

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathcal{S}_1 = \{-3; 2\}.}$$

2. $$e^{x^2+4} = e^{4x} \Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$\boxed{\text{L'unique solution de l'équation est } x = 2.}$

3. L'équation $(\ln(x) - 1)(2 - 5\ln(x)) = 0$ étant déjà factorisé, on a d'une part

$$\ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$$

et d'autres part

$$2 - 5\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{2}{5} \iff x = e^{2/5}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{e^{2/5}; e\right\}.}$$

4. On trouve une racine évidente $\boxed{x_1 = 1}$. On sait par ailleurs que dans un trinôme $ax^2 + bx + c$ admettant deux racines x_1 et x_2, on a $ax_1x_2 = c$, ici on trouve alors que la deuxième racine est $\boxed{3}$.

Exercice 7 :

Simplifier les expressions suivantes

1. $K = \ln\left(\frac{\sqrt{8}+2}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{8}-2}{2}\right)$.
2. $L = \ln(\sqrt{e^3})$
3. $M = \ln(x^4) - 4\ln(x^2) + 3\ln(x)$

$$\begin{aligned}
K &= \ln\left(\frac{\sqrt{8}+2}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{8}-2}{2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{8}+2}{2} \times \frac{\sqrt{8}-2}{2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{4} \times (\sqrt{8}+2)(\sqrt{8}-2)\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{4} \times (8-4)\right)\\
&= \boxed{\ln(1) = 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \ln(\sqrt{e}^3)\\
&= 3\ln(\sqrt{e})\\
&= \boxed{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

$$M = 4\ln(x) - 8\ln(x) + 3\ln(x) = \boxed{-\ln(x)}$$

Exercice 8 :

Résoudre les inéquations suivantes par la méthode de votre choix.

1. $\dfrac{2x}{5} - \dfrac{1}{3} \leq -\dfrac{4}{15}$.
2. $e^{2x^2-4x} \geq 1$.
3. $\dfrac{1}{x-5} < \dfrac{1}{2x+1}$.

1. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{5} - \frac{1}{3} \leq -\frac{4}{15} &\iff 6x - 5 \leq -4\\
&\iff 6x \leq 1\\
&\iff x \leq \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S}_1 = \left]-\infty; \frac{1}{6}\right].}$$

2. On résout l'inéquation

$$e^{2x^2-4x} \geq 1 \iff 2x^2 - 4x \geq 0 \iff 2x(x-2) \geq 0$$

On réalise alors un tableau de signe pour déterminer quand l'expression de droite est positive

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $2x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S}_2 =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[.}$$

3. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-5} < \frac{1}{2x+1} &\iff \frac{1}{x-5} - \frac{1}{2x+1} < 0\\
&\iff \frac{2x+1}{(2x+1)(x-5)} - \frac{x-5}{(2x+1)(x-5)} < 0\\
&\iff \frac{2x+1-x+5}{(2x+1)(x-5)} < 0\\
&\iff \frac{x+6}{(2x+1)(x-5)} < 0
\end{aligned}$$

On a alors le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		-6		$-1/2$		5		$+\infty$
Signe de $x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{x+6}{(2x+1)(x-5)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S}_3 =]-\infty;-6[\cup\left]-\frac{1}{2};5\right[.}$$

Exercice 9 :

Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.
On donnera au préalable l'ensemble sur lequel cette équation est définie.

En gardant la définition du cours sur les fonctions du type $x \mapsto x^\alpha$, nous allons définir cette équation sur $\boxed{\mathbb{R}_+^*}$.

Remarque 0.1 : La valeur de 0^0 est un débat en mathématiques dans lequel beaucoup pensent qu'il faut définir $0^0 = 1$, quand d'autres estiment que cela dépend du contexte. On pourrait au demeurant démontrer que lorsque x se rapproche de 0, $x^{\sqrt{x}}$ et $\sqrt{x}^x$ se rapprochent de 1.
On verra cela dans le chapitre sur les limites.

Soit $x > 0$.

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow \ln(x^{\sqrt{x}}) = \ln(\sqrt{x}^x) \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x})$$

Or $\sqrt{x} = x^{1/2}$, donc $\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{1/2}) = \frac{\ln(x)}{2}$. Ainsi

$$\sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) - \frac{x\ln(x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x)\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

Donc soit $\ln(x) = 0$ c'est à dire $x = 1$, soit

$$\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$

Or l'équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\mathcal{S} = \{1;4\}}$.