Correction du Devoir Surveillé n° 0

10/09/22

Exercice 1 :

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1} \qquad g(x) = -\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$.

1. Donner les domaines de définition de f et g.
2. On note $a = \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$.
   (a) Montrer que $g(a) = -\sqrt{2}$.
   (b) Calculer $f(g(a))$. On donnera le résultat en fonction de a.
   (c) Simplifier l'expression de a.
3. (a) L'équation $g(x) = -1$ a-t-elle des solutions ?
   (b) En déduire l'ensemble de définition de $f \circ g$.
   (c) Donner pour tout $x \in D_{f\circ g}$, l'expression de $f(g(x))$. Simplifier l'expression au maximum.

1. La fonctions f est définie sur $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$ et g est définie sur $\boxed{D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.
2. (a)

$$g(a) = -\left(\frac{\dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}+1}{\dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}-2}\right) = -\left(\frac{\dfrac{-2\sqrt{2}-1+1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}}{\dfrac{-2\sqrt{2}-1-2+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}}\right) = -\left(\frac{-3\sqrt{2}}{-3}\right) = \boxed{-\sqrt{2}}$$

   (b)

$$f(g(a)) = f(-\sqrt{2}) = \frac{-2\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}+1} = \boxed{a}$$

   (c)

$$a = \frac{-2\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}+1} = wa\frac{(-2\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})}{(-\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2})} = \frac{(-2\sqrt{2}-4-1-\sqrt{2})}{-1} = \boxed{5+3\sqrt{2}}$$

3. (a) Soit $x \in D_g$.

$$g(x) = -1 \Leftrightarrow -\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x+1 = x-2 \Leftrightarrow 1 = -2$$

   Cette dernière égalité étant évidemment fausse, on en conclut que l'équation $g(x) = 1$ $\boxed{\text{n'admet aucune solution.}}$

   (b) La fonction $f \circ g$ est définie pour x tels que

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ g(x) \neq -1 \end{cases}$$

   Or nous venons de voir que la deuxième condition est vérifiée pour $x \neq 2$. Donc l'ensemble de définition de $f \circ g$ est $\boxed{D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.

   (c) Soit $x \neq 2$.

$$(f \circ g)(x) = \frac{-2\left(\frac{x+1}{x-2}\right)-1}{-\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+1} = \frac{\frac{-2x-2-x+2}{x-2}}{\frac{-x-1+x-2}{x-2}} = \frac{-3x}{-3} = \boxed{x}$$

Exercice 2 :

L'énoncé est rédigé de telle sorte que, même sans avoir réussi à démontrer certaines questions, on puisse se servir des résultats, en les admettant, afin de continuer l'exercice.

Partie I

On considère les fonctions P et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$ par :
$P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$ et $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$.

1. Etudier le signe de $P(x)$, puis donner sa forme développée.
2. Calculer $g'(x)$ puis l'exprimer en fonction de $P(x)$. En déduire les variations de g sur son ensemble de définition.
3. En déduire que $g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Soit $x \in]0;+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
2. En déduire les variations de f sur son ensemble de définition.
3. Déterminer une équation de T_1, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4. Résoudre l'équation $f(x) \geq x+1$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ d ?équation $y = x+1$.
5. Tracer Δ, T_1, puis l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm (ou 2 grands carreaux), de 0 à 5 en abscisse, de -2 à 6 en ordonnée.

Partie III

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = x^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. A l'aide de la question II.4, donner les variations de h.
3. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport $\mathcal{D} : y = x$.

Partie I

1. $P(1) = 3\times 1^3 - 1 - 2 = 0$ donc on peut factoriser par $x-1$. On trouve (divisino euclidienne ou identification. $P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$ et $3x^2+3x+2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ car $a = 3 > 0$ et car $\Delta = -15 < 0$, donc le signe de $P(x)$ est celui de $x-1$.

2. soit $x > 0$ $g'(x) = 3x^2 - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^3 - x - 2}{x} = \dfrac{P(x)}{x}$ donc, comme $x > 0$ son signe est celui de $P(x)$.

3. g est donc strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ (signe de $x-1$ pour avoir les variations de g).

4. Le minimum de g est donc atteint pôur $x = 1$ et vaut $g(1) = 1^3 - 1 + 3 - 2\ln(1) = 3 > 0$ donc $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II

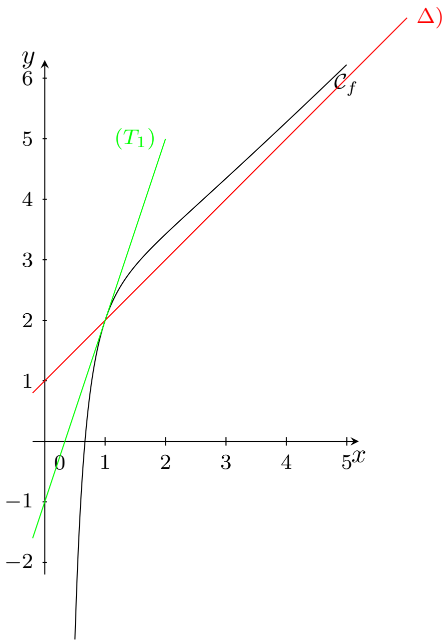
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Soit $x \in]0;+\infty[$. $f'(x) = 1 + \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2 - (x-1+\ln(x))\,2x}{x^4} = 1 + \dfrac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln(x)}{x^4}$
$= 1 + \dfrac{x(-x-1-2\ln(x))}{x^4} = \dfrac{x^3-x+3-2\ln(x)}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

2. D'après la première partie, on a donc $f'(x) > 0$ sur $\mathcal{D}_f$ donc f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.

3. $T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) + 2 = 3x - 1$.

4. Soit $x > 0$, $f(x) - (x+1) = \dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2}$, du signe de $h(x) = x - 1 + \ln(x)$. Or $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$ donc h est strictement croissante.
De plus, $h(1) = 0$ donc, lorsque $x \geq 1$, $f(x) - (x+1) \geq 0$ donc $f(x) \geq x+1$ et, de même, $f(x) \leq x+1$ lorsque $0 < x \leq 1$.
Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ sur $[1;+\infty[$ et en dessous sur $]0;1]$.

5. 

Partie III
On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = x^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ (désolé pour la faute sur h !).

1. Soit $x > 0$. Par définition, $h(x) = \mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)}$
Donc $h'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)} = \dfrac{\ln(x)+x-1}{x^2}\mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)} = (f(x)-(x+1))\mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)}$.

2. A l'aide de la question précédente, le signe de $h'(x)$ est celui de $f(x) - (x+1)$. A l'aide de la question II.4, h est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

3. On a $h(x) \geq x \iff \mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)} \geq x \iff \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x) \geq \ln(x) \iff \left(1-\frac{1}{x}-1\right)\ln(x) \geq 0 \iff -\frac{1}{x}\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 0 \iff x \leq 1$.
$\mathcal{C}_h$. est donc au dessus de $\mathcal{D} : y = x$ sur $]0;1]$ et en dessous sur $[1;+\infty[$.

Exercice 3 :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on appelle M_a la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer M_0 et $M_{\frac{1}{2}}$.

2. (a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, exprimer M_a comme combinaison linéaire des matrices I_2 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer J^2.

(c) En déduire que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $M_a M_b = M_{a+b-2ab}$.

3. On suppose que $a \neq \frac{1}{2}$. Déterminer un nombre $b \in \mathbb{R}$, exprimé en fonction de a, tel que $M_a M_b = I_2$.
4. Déterminer l'unique nombre $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $M_\alpha^2 = M_\alpha$.
5. On pose $P = M_\alpha$ et $Q = I_2 - P$.
   (a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $M_a = P + \beta Q$ et exprimer β en fonction de a.
   (b) Calculer P^2, QP, PQ et Q^2.
   (c) Soit $a \in \mathbb{R}$.
      i. Calculer M_a^2 et M_a^3.
      ii. Conjecturer alors une expression de M_a^n en fonction de P, Q, β et n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la démontrer par récurrence.
   (d) Expliciter la matrice M_a^n pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Par définition,

$$\boxed{M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{M_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}.$$

2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. $M_a = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a & 0 \\ 0 & 1-2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = (1-2a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il vient que

$$\boxed{M_a = (1-2a)I_2 + aJ \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.}$$

   (b) Le calcul donne que

$$\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2J.}$$

   (c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $A = a + b - 2ab$.
   On a que $M_a M_b = \big((1-2a)I_2 + aJ\big)\big((1-2b)I_2 + bJ\big) = (1-2a)(1-2b)I_2 + b(1-2a)J + (1-2b)aJ + abJ^2 = (1-2a)(1-2b)I_2 + \big(b(1-2a) + a(1-2b) + 2ab\big)J$ car $J^2 = 2J$.
   Or $(1-2a)(1-2b) = 1 - 2a - 2b + 4ab = 1 - 2(a+b-2ab) = 1 - 2A$ et $b(1-2a) + a(1-2b) + 2ab = b - 2ab + a - 2ab + 2ab = a + b - 2ab = A$.
   Donc on obtient que

$$\boxed{M_a M_b = (1-2A)I_2 + AJ = M_A = M_{a+b-2ab} \text{ pour tous } a, b \in \mathbb{R}} \text{ d'après la question 2a.}$$

3. Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $M_a M_b = I_2$. On sait, d'après la question 2c, que $M_a M_b = M_{a+b-2ab}$.
   Or, puisque l'on a $M_{a+b-2ab} = (1 - 2(a+b-2ab))I_2 + (a+b-2ab)J$, alors on en déduit que $M_a M_b = I_2 \Leftrightarrow a + b - 2ab = 0 \Leftrightarrow b(1-2a) = -a \Leftrightarrow b = \frac{-a}{1-2a} = \frac{a}{2a-1}$.
   Donc,

$$\boxed{M_a M_b = I_2 \Leftrightarrow b = \tfrac{a}{2a-1} \text{ pour tout } a \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\}.}$$

4. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $M_\alpha^2 = M_\alpha$. On a alors $M_\alpha^2 = M_\alpha \times M_\alpha = M_{\alpha+\alpha-2\alpha^2} = M_{2\alpha-2\alpha^2} = M_\alpha$ d'après la question 2c.
   Or, $M_{2\alpha-2\alpha^2} = M_\alpha \Leftrightarrow 2\alpha - 2\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 = 0$ en divisant par α supposé non nul. Il vient alors que $M_{2\alpha-2\alpha^2} = M_\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. L'unique valeur de $\alpha \in \mathbb{R}^*$ telle que $M_\alpha^2 = M_\alpha$ est

$$\boxed{\alpha = \tfrac{1}{2}.}$$

5. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $P = M_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}J$ et $Q = I_2 - \frac{1}{2}J = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Supposons qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $M_a = P + \beta Q$.
   $M_a = P + \beta Q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2+\beta/2 & 1/2-\beta/2 \\ 1/2-\beta/2 & 1/2+\beta/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} = a \Leftrightarrow \beta = 1 - 2a$. Cette valeur convient après vérification.
   On a donc

$$\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{R},\ M_a = P + (1-2a)Q.}$$

(b)
- D'après la question 4, $\boxed{P^2 = P.}$
- Le calcul donne $\boxed{QP = (I_2 - P)P = P - P^2 = P - P = 0.}$.
- Similairement, $\boxed{PQ = P(I_2 - P) = P - P^2 = P - P = 0.}$
- Le calcul donne $\boxed{Q^2 = (I_2 - P)^2 = I_2^2 - P - P + P^2 = I_2 - P - P + P = I_2 - P = Q.}$

(c) i. Le calcul donne
- $M_a^2 = (P + \beta Q)^2 = (P + \beta Q)(P + \beta Q) = P^2 + \beta PQ + \beta QP + \beta^2 Q^2 = P + \beta^2 Q$ d'après la question précédente.
- $M_a^3 = M_a^2 \times M_a = (P + \beta^2 Q)(P + \beta Q) = P^2 + \beta PQ + \beta^2 QP + \beta^3 Q^2 = P + \beta^3 Q.$

ii. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $M_a^n = P + \beta^n Q$.
- <u>Initialisation</u> $(n = 1)$: $P + \beta^1 Q = P + \beta Q = M_a$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
- <u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $M_a^n = P + \beta^n Q$ et on veut montrer que $M_a^{n+1} = P + \beta^{n+1} Q$.
  On a $M_a^{n+1} = M_A^n \times M_a = (P+\beta^n Q)\times(P+\beta Q) = P^2+\beta PQ+\beta^n QP+\beta^{n+1}Q^2 = P+\beta^{n+1}Q$. Récurrence établie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_a^n = P + \beta^n Q.}$

(d) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $M_a^n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta^n/2 & -\beta^n/2 \\ -\beta^n/2 & \beta^n/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\beta^n}{2} & \frac{1-\beta^n}{2} \\ \frac{1-\beta^n}{2} & \frac{1+\beta^n}{2} \end{pmatrix}$.

Donc

$$\boxed{M_a^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(1-2a)^n}{2} & \frac{1-(1-2a)^n}{2} \\ \frac{1-(1-2a)^n}{2} & \frac{1+(1-2a)^n}{2} \end{pmatrix} \text{ pour tous } a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.}$$

Exercice 4 :

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier $k \geq 3$:
$$\frac{-8}{k^2 - 2k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-2}$$
2. En déduire, pour tout $n \geq 3$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{-8}{k^2 - 2k}$.

1. Soient a et b deux réels et k un entier supérieur à 3.
$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k-2} = \frac{a(k-2) + bk}{k(k-2)} = \frac{(a+b)k - 2a}{k^2 - 2k}$$
Alors
$$\frac{-8}{k^2 + 2k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-2} \Leftrightarrow \frac{-8}{k^2 + 2k} = \frac{(a+b)k - 2a}{k^2 - 2k} \Leftrightarrow -8 = (a+b)k - 2a$$
Or deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients. On obtient alors le système d'équation suivant :
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$
Ainsi, pour tout entier $k \geq 1$, $\boxed{\dfrac{-8}{k^2 - 2k} = \dfrac{4}{k} - \dfrac{4}{k-2}.}$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{-8}{k^2-2k} = \sum_{k=3}^{n} \frac{4}{k} - \frac{4}{k-2} = 4\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - 4\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2}$$

On effectue un changement d'indice dans la seconde somme. On pose $i = k-2$. Ainsi si $k=3$, $i=1$, et si $k=n$, $i=n-2$. Ainsi

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{-4}{k^2+2k} = 4\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - 4\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i} = \frac{4}{n} + \frac{4}{n-1} - \frac{4}{1} - \frac{4}{2} = \boxed{\frac{4}{n} + \frac{4}{n-1} - 6}$$

Problème :

Soient $a_0, a_1, a_2 a_3, ...$ des nombres réels. Le but de cet exercices est de montrer par deux méthodes différentes la propriété, notée $(\star)$ dans cet exercice :

$$(\star) \ : \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - n a_n.$$

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

- **Partie I : Démonstration par récurrence.**
  1. Montrer l'étape d'initialisation.
  2. Recopier, en complétant les pointillés, les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) + \dots. \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \dots. \end{cases}$$

  3. A l'aide des égalités précédentes, démontrer l'étape d'hérédité. Conclure.
- **Partie II : Démonstration par télescopage.**
  1. A l'aide d'un télescopage, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k a_k - (k+1)a_{k+1}$.
  2. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k(a_k - a_{k+1}) = (k a_k - (k+1)a_{k+1}) + a_{k+1}$.
  3. Démontrer la propriété $(\star)$.
- **Partie III : Trois applications.**
  1. Appliquer l'égalité $(\star)$ avec $a_k = k^2$, et en déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k(2k+1)$.
  2. (a) A l'aide d'une propriété du logarithme, simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

     (b) En appliquant l'égalité $(\star)$ à des valeurs de a_k bien choisies, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ; \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

  3. (a) Rappeler l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^k$.

(b) En appliquant ($\star$) à des valeurs de a_k bien choisies, calculer , $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} ke^k(1-e)$.

Partie I : Démonstration par récurrence.

1. On initialise pour $n=1$. On a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{0} k(a_k - a_{k+1}) = 0$

   et d'autre part $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - na_n = \sum_{k=1}^{1} a_k - a_1 = a_1 - a_1 = 0$.

   $\boxed{\text{La propriété est donc vraie au rang } n=1.}$

2. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) + n(a_n - a_{n+1})}$

   $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - a_{n+1}}$.

3. **Hérédité**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_n$.

   Montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}$.

   D'après la question précédente on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) + n(a_n - a_{n+1})$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et la question précédente, on trouve

   $$\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_n + n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - a_{n+1} - na_n + na_n - na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}$$

   Ainsi l'hérédité est vérifiée.

   Conclusion

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}$

Partie II : Démonstration par télescopage.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} ka_k - (k+1)a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} ka_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}$. On pose $i = k+1$ dans la deuxième somme, on obtient alors

   $$\sum_{k=0}^{n-1} ka_k - (k+1)a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} ka_k - \sum_{i=1}^{n} ia_i = 0a_0 - na_n = -na_n$$

   Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} ka_k - (k+1)a_{k+1} = -na_n}$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $(ka_k - (k+1)a_{k+1}) + a_{k+1} = ka_k - ka_{k+1} - a_{k+1} + a_{k+1} = ka_k - ka_{k+1} = \boxed{k(a_k - a_{k+1})}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les questions précédentes, on trouve

   $$\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(ka_k - (k+1)a_{k+1}) + a_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} ka_k - (k+1)a_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

   On pose $i = k+1$ dans la deuxième somme, et on utilise la question 1) : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = -na_n + \sum_{i=1}^{n} a_i}$.

Partie III : Trois applications.

1. On pose $a_k = k^2$ dans $(\star)$. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k^2-(k+1)^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - n\times n^2 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} k(k^2-(k^2+2k+1)) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - n^3$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} -k(2k+1)) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^3$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} k(2k+1)) = n^3 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n[\frac{6n^2-(n+1)(2n+1)}{6}] = n\left(\frac{4n^2-3n-1}{6}\right)$$

Ainsi $\boxed{\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} k(2k+1)) = \frac{2n(n-1)(n-\frac{1}{4})}{3}}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \ln(n!)$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} k(\ln(k)-\ln(k+1))$$

   On pose $a_n = \ln(n)$. En appliquant la formule $(\star)$, on obtient
$$\sum_{k=0}^{n-1} k(\ln(k)-\ln(k+1)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\times\ln(n) = \ln(n!) - \ln(n^n) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

   Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\boxed{\sum_{k=1}^{n} e^k = e\left(\frac{1-e^n}{1-e}\right)}$.

   (b) On pose $a_n = \mathrm{e}^n$. En appliquant la formule $(\star)$, on obtient
$$\sum_{k=0}^{n-1} ke^k(1-e) = \sum_{k=0}^{n-1} k(e^k-e^{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} e^k - n\times e^n = \boxed{e\left(\frac{1-e^n}{1-e}\right) - ne^n}$$