Devoir Surveillé n° 1

Le 15/10/22 **Durée : 4 heures**

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice n°1

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1} \qquad g(x) = -\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$.

1. Donner les domaines de définition de f et g.
2. On note $a = \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$.
   (a) Montrer que $g(a) = -\sqrt{2}$.
   (b) Calculer $f(g(a))$. On donnera le résultat en fonction de a.
   (c) Simplifier l'expression de a.
3. (a) L'équation $g(x) = -1$ a-t-elle des solutions ?
   (b) En déduire l'ensemble de définition de $f \circ g$.
   (c) Donner pour tout $x \in D_{f\circ g}$, l'expression de $f(g(x))$. Simplifier l'expression au maximum.

Exercice n°2

L'énoncé est rédigé de telle sorte que, même sans avoir réussi à démontrer certaines questions, on puisse se servir des résultats, en les admettant, afin de continuer l'exercice.

Partie I

On considère les fonctions P et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$ par :
$P(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$ et $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$.

1. Etudier le signe de $P(x)$, puis donner sa forme développée.
2. Calculer $g'(x)$ puis l'exprimer en fonction de $P(x)$. En déduire les variations de g sur son ensemble de définition.
3. En déduire que $g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Soit $x \in]0;+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
2. En déduire les variations de f sur son ensemble de définition.
3. Déterminer une équation de T_1, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4. Résoudre l'équation $f(x) \geq x + 1$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ d ?équation $y = x + 1$.
5. Tracer Δ, T_1, puis l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm (ou 2 grands carreaux), de 0 à 5 en abscisse, de -2 à 6 en ordonnée.

Partie III

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = x^{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. A l'aide de la question II.4, donner les variations de h.
3. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport $\mathcal{D}$: $y = x$.

Exercice n°3

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on appelle M_a la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer M_0 et $M_{\frac{1}{2}}$.
2. (a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, exprimer M_a comme combinaison linéaire des matrices I_2 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer J^2.
   (c) En déduire que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $M_a M_b = M_{a+b-2ab}$.
3. On suppose que $a \neq \frac{1}{2}$. Déterminer un nombre $b \in \mathbb{R}$, exprimé en fonction de a, tel que $M_a M_b = I_2$.
4. Déterminer l'unique nombre $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $M_\alpha^2 = M_\alpha$.
5. On pose $P = M_\alpha$ et $Q = I_2 - P$.
   (a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $M_a = P + \beta Q$ et exprimer β en fonction de a.
   (b) Calculer P^2, QP, PQ et Q^2.
   (c) Soit $a \in \mathbb{R}$.
      i. Calculer M_a^2 et M_a^3.
      ii. Conjecturer alors une expression de M_a^n en fonction de P, Q, β et n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la démontrer par récurrence.
   (d) Expliciter la matrice M_a^n pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n°4

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier $k \geq 3$:
$$\frac{-8}{k^2 - 2k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-2}$$
2. En déduire, pour tout $n \geq 3$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{-8}{k^2 - 2k}$.

Problème

Soient $a_0, a_1, a_2 a_3, ...$ des nombres réels. Le but de cet exercices est de montrer par deux méthodes différentes la propriété, notée $(\star)$ dans cet exercice :

$$(\star)\ :\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - n a_n.$$

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

- **Partie I : Démonstration par récurrence.**
  1. Montrer l'étape d'initialisation.
  2. Recopier, en complétant les pointillés, les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) + \dots . \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \dots . \end{cases}$$

  3. A l'aide des égalités précédentes, démontrer l'étape d'hérédité. Conclure.

- **Partie II : Démonstration par télescopage.**
  1. A l'aide d'un télescopage, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k a_k - (k+1) a_{k+1}$.
  2. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k(a_k - a_{k+1}) = (k a_k - (k+1) a_{k+1}) + a_{k+1}$.
  3. Démontrer la propriété $(\star)$.

- **Partie III : Trois applications.**
  1. Appliquer l'égalité $(\star)$ avec $a_k = k^2$, et en déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k(2k+1)$.
  2. (a) A l'aide d'une propriété du logarithme, simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

     (b) En appliquant l'égalité $(\star)$ à des valeurs de a_k bien choisies, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ; \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

  3. (a) Rappeler l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^k$.

     (b) En appliquant $(\star)$ à des valeurs de a_k bien choisies, calculer , $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k e^k (1-e)$.