Correction du Devoir Surveillé n° 2

10/12/22

Exercice 1 :

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = e\sqrt{u_n - 1} + 1$.

1. On étudie dans cette partie la fonction $f : x \to e\sqrt{x-1}+1$. On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction f et le signe de f', puis tracer le tableau de variation.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (d) Montrer que $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in [1; 1+e^2]$.
   (e) Donner l'équation de la tangente à f en $x = 1 + e^2$.
2. On considère $u_0 = 1 + e^2$. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. On cherche à déterminer une expression pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 > 1$. On pose alors

$$v_n = \ln(u_n - 1).$$

   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   (b) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}v_n$.
   (d) Exprimer v_n en fonction de n et de v_0.
   (e) En déduire u_n en fonction de n et de u_0.

Dans toute cette partie, on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = e\sqrt{u_n - 1} + 1.$$

1. On étudie dans cette partie la fonction $f : x \to e\sqrt{x-1}+1$.
   (a) Pour trouver le domaine de définition de f, on résout l'inéquation

$$x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1$$

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est donc } \mathcal{D} = [1; +\infty[.}$$

   (b) La fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que composée et somme de fonction dérivable :

$$\boxed{f'(x) = \frac{e}{2\sqrt{x-1}}.}$$

Une racine carrée étant toujours positive, on a $\boxed{\forall x \in]1; +\infty[,\ f'(x) > 0.}$
On peut construire le tableau de variation suivant :

x	1	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$+$	
Variation de f	1 ↗	$+\infty$

(c) On résout l'équation

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff e\sqrt{x-1}+1=x \\ &\iff e\sqrt{x-1}=x-1 \\ &\iff e^2(x-1)=(x-1)^2 \\ &\iff e^2x-e^2=x^2-2x+1 \\ &\iff x^2-(2+e^2)x+1+e^2=0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant de l'équation d'ordre 2

$$\begin{aligned} \Delta &= (-(2+e^2))^2-4(1+e^2) \\ &= 4+4e^2+e^4-4-4e^2 \\ &= e^4>0 \end{aligned}$$

Les solutions sont donc données par

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(2+e^2)-\sqrt{e^4}}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{(2+e^2)+\sqrt{e^4}}{2} \\ &= \frac{2+2e^2}{2} \\ &= 1+e^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } f(x)=x \text{ est donc } \mathcal{S}=\{1;1+e^2\}.}$$

(d) D'une part on a

$$\begin{aligned} f(x)\geq x &\iff e\sqrt{x-1}+1\geq x \\ &\iff e\sqrt{x-1}\geq x-1 \\ &\iff e^2(x-1)\geq(x-1)^2 \qquad \text{car } x-1\geq 0 \text{ et la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}+ \\ &\iff e^2x-e^2\geq x^2-2x+1 \\ &\iff x^2-(2+e^2)x+1+e^2\leq 0 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on peut construire le tableau de signe de $x^2-(2+e^2)x+1+e^2$.

x	$-\infty$		1		$1+e^2$		$+\infty$
Signe du Polynôme		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\boxed{f(x)\geq x \iff x\in[1;1+e^2]}$$

(e) On a $f'(1+e^2)=\dfrac{e}{2\sqrt{1+e^2-1}}=\dfrac{1}{2}$ et $f(1+e^2)=e\sqrt{1+e^2-1}+1=1+e^2$. On en déduit l'équation de la tangente à la fonction f en $x=1+e^2$,

$$\boxed{y=f'(1+e^2)(x-(1+e^2))+f(1+e^2)=\frac{1}{2}x+\frac{1+e^2}{2}.}$$

2. On considère $u_0=1+e^2$. On montre par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   - On cherche à montrer les propositions $\mathrm{P}_n : \{u_n=1+e^2\}$.
   - **Initialisation :** La propriété $\mathcal{P}_0$ s'écrit $u_0=1+e^2$. Or d'après l'énoncé, $u_0=1+e^2$. La propriété $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

- **Hérédité :** On suppose que P_n est vrai pour un certain rang n. (On a donc $u_n = 1 + e^2$)

  On utilise la définition de la suite, à savoir $u_{n+1} = f(u_n)$. Or comme $u_n = 1 + e^2$, on a

  $$u_{n+1} = f(1 + e^2) = 1 + e^2 \qquad \text{(d'après la question 1(d))}$$

  La proposition P_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (P_n) est héréditaire.
- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + e^2$, en d'autres termes, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$

3. On cherche à déterminer une expression pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 > 1$. On pose alors

$$v_n = \ln(u_n - 1).$$

(a)
- On cherche à montrer les propositions $\mathrm{P}_n : \{u_n > 1\}$.
- **Initialisation :** La propriété $\mathcal{P}_0$ s'écrit $u_0 > 1$. Or d'après l'énoncé, $u_0 > 1$. La propriété $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.
- **Hérédité :** On suppose que P_n est vrai pour un certain rang n. (On a donc $u_n > 1$)

  On a alors

  $$\begin{array}{rcll} u_n > 1 & \Longleftarrow & u_n - 1 > 0 & \\ & \Longleftarrow & \sqrt{u_n - 1} > \sqrt{0} & \text{(Car la fonction racine est croissante)} \\ & \Longleftarrow & e\sqrt{u_n - 1} > 0 & \\ & \Longleftarrow & e\sqrt{u_n - 1} + 1 > 1 & \end{array}$$

  Ainsi, $u_{n+1} > 1$, la proposition P_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (P_n) est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 1}$

(b) On a montré précédemment que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1 \Longleftrightarrow u_n - 1 > 0$. $\boxed{\text{Ainsi } v_n \text{ est bien définie.}}$

(c) On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & \ln(u_{n+1} - 1) \\ & = & \ln(e\sqrt{u_n - 1} + 1 - 1) \\ & = & \ln(e\sqrt{u_n - 1}) \\ & = & \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n - 1}) \\ & = & 1 + \dfrac{1}{2}\ln(u_n - 1) \end{array}$$

On en déduit la relation $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}v_n}$.

(d) On pose la suite $w_n = v_n - 2$ et ainsi pour tout n entier,

$$\begin{array}{rcl} w_{n+1} & = & v_{n+1} - 2 \\ & = & 1 + \dfrac{1}{2}v_n - 2 \\ & = & \dfrac{1}{2}(w_n + 2) - 1 \\ & = & \dfrac{1}{2}w_n. \end{array}$$

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Enfin $v_n = w_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2$ et comme $w_0 = v_0 - 2$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (v_0 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2.}$$

(e) D'après les questions précédentes, $v_0 = \ln(u_0 - 1)$ et

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n - 1) &\iff u_n - 1 = e^{v_n} \\ &\iff u_n = e^{v_n} + 1 \\ &\iff u_n = \exp\left((v_0 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) + 1 \end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \exp\left((\ln(u_0 - 1) - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) + 1.}$$

Exercice 2 :

On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad et \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

Etude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geq 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$.

Etude de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Etudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $v_n \leq 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$.
5. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2 - k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$.
6. Calculer, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$.
7. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

Etude de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

8. Etudier la monotonie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leq v_n$.

1. Soit $k \geq 1$. On a $\sqrt{k+1} \geq \sqrt{k}$, donc $\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \geq 2\sqrt{k}$, et donc $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.
   Par ailleurs,
   $$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = 2(k+1-k) = 2$$
   donc
   $$\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geq 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$$
   On a donc bien $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geq 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right).}$
2. D'après la question précédente, en sommant terme à terme, on obtient
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$$

Or après télescopage, on trouve

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = 2\sqrt{n+1}-2}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un simple télescopage donne

$$v_{n+1}-v_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc décroissante.}}$

4. Pour tout $k \geq 2$, on a $k^2 \geq k^2 - k$, donc $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k^2-k}$. En passant à la somme et en ajoutant le terme en $k=1$, on trouve

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k} \quad \text{puis} \quad \boxed{v_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k}}$$

5. Méthode vue plusieurs fois en classe. On trouve $\boxed{a=-1 \text{ et } b=1.}$
6. Soit $n \geq 2$.

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \boxed{1-\frac{1}{n}}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En combinant les résultats précédents, on trouve

$$v_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k}$$

ou encore

$$v_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

$\boxed{\text{Donc } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est majorée par 2.}}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un télescopage donne

$$w_{n+1}-w_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0$$

$\boxed{\text{Donc la suite est croissante.}}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \geq 1$, $k^3 \geq k^2$, donc $\dfrac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$. En passant à la somme, on trouve

$$w_n \leq v_n$$

Exercice 3 :

1. **Préliminaires**
   On définit une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes par : $P_1(X) = X \qquad P_2(X) = X^2 - 2$.
   et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

   $$P_{k+1}(X) = XP_k(X) - P_{k-1}(X)$$

   (a) Déterminer les polynômes P_3 et P_4.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $y = x + \dfrac{1}{x}$. Calculer $P_1(y)$, $P_2(y)$ et $P_3(y)$.

   (c) Montrer par récurrence double que, pour tout entier $k > 0$, P_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité

   $$P_k(x+\frac{1}{x}) = x^k + \frac{1}{x^k}$$

2. **Un exemple particulier**
   On pose Q le polynôme défini par $Q(X) = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$.

   (a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.

(b) Ecrire Qsous la forme $Q(X) = a_3X^3 + a_2(X^2 + X^4) + a_1(X + X^5) + a_0(1 + X^6)$, en précisant les valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3).

(c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{Q(x)}{x^3} = 2 + P_3(y) + P_2(y) - 9P_1(y)$. (On rappelle que $y = x + \dfrac{1}{x}$).

(d) On pose $\tilde{Q}(y) = 2 + P_3(y) + P_2(y) - 9P_1(y)$. Montrer que

$$\tilde{Q}(y) = (y^3 - 3y) + (y^2 - 2) - 9y + 2$$

(e) Résoudre $\tilde{Q}(y) = 0$.

(f) En déduire alors que résoudre $Q(x) = 0$ est équivalent à résoudre pour tout réel x non nul, $x + \frac{1}{x} = 3$ et $x + \frac{1}{x} = 4$.

(g) Conclure sur les racines de Q.

1. **Préliminaires**

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = xP_2(x) - P_1(x) = x(x^2 - 2) - x = \boxed{x^3 - 3x}$.
$P_4(x) = xP_3(x) - P_2(x) = x(x^3 - 3x) - (x^2 - 2) = \boxed{x^4 - 4x^2 + 2}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $y = x + \dfrac{1}{x}$.

- $P_1(y) = y = \boxed{x + \frac{1}{x}}$.
- $P_2(y) = y^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 - 2 = \boxed{x^2 + \dfrac{1}{x^2}}$.
- $P_3(y) = y^3 - 3y = x^3 + 3\dfrac{x^2}{x} + 3\dfrac{x}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - 3(x + \dfrac{1}{x}) = \boxed{x^3 + \dfrac{1}{x^3}}$.

(c) **Initialisation :**
Si $k = 1$, d'après la question (b) P_1 est de degré 1 et $P_1(y) = P_1(x + \dfrac{1}{x}) = x + \dfrac{1}{x}$. La proposition est donc vraie au rang $k = 1$.

Si $k = 2$, d'après la question (b) P_2 est de degré 2 et $P_2(y) = P_2(x + \dfrac{1}{x}) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. La proposition est donc vraie au rang $k = 2$.

Hérédité :
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la proposition est vraie au rang k et $k-1$. C'est à dire que P_k est de degré k, $P_k(y) = P_k(x + \dfrac{1}{x}) = x^k + \dfrac{1}{x^k}$, et P_{k-1} est de degré $k-1$, $P_{k-1}(y) = P_{k-1}(x + \dfrac{1}{x}) = x^{k-1} + \dfrac{1}{x^{k-1}}$.
Montrons que P_{k+1} est de degré $k+1$, $P_{k+1}(y) = P_{k+1}(x + \dfrac{1}{x}) = x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}}$.

i. Comme $deg(P_k) = k$, le polynôme $x \mapsto xP_k(x)$ est de degré $k+1$, et comme $deg(P_{k-1}) = k-1$, le polynôme $xP_k(x) - P_{k-1}(x)$ est de degré $k+1$. Donc P_{k+1} est de degré $k+1$.

ii. D'autre part,

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x + \frac{1}{x}) &= (x + \frac{1}{x})P_k(x + \frac{1}{x}) - P_{k-1}(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})(x^k + \frac{1}{x^k}) - (x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}) \\ &= x^{k+1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k+1}} - x^{k-1} - \frac{1}{x^{k-1}} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$

Conclusion :
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P_k \text{ est de degré } k,\ P_k(y) = P_k(x + \dfrac{1}{x}) = x^k + \dfrac{1}{x^k}.}$

2. **Un exemple particulier**

(a) On a $Q(0) = 1$, donc $\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } Q.}$

(b) D'après ce que l'on vient de voir $Q(x) = 2x^3+(1+x^6)+(x+x^5)-9(x^2+x^4) = a_3+\sum_{k=0}^{2} a_k(x^k+x^{6-k})$.

(c) En divisant par x^3 la relation précédente : $\boxed{\dfrac{Q(x)}{3} = 2+(x^3+\dfrac{1}{x^3})+(x^2+\dfrac{1}{x^2})-9(x+\dfrac{1}{x})}$. Avec les notation utilisées dans la partie Préliminaires, on trouve directement $\boxed{\frac{Q(x)}{x} = 2+P_3(y)+P_2(y)-9P_1(y)}$.

(d) D'après la question 1c), $\boxed{\tilde{Q}(y) = (y^3-3y)+(y^2-2)-9y+2.}$

(e)

$$\tilde{Q}(y) = 0 \Leftrightarrow y^3+y^3-12y = 0 \Leftrightarrow y(y^2+y-12) \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y^2+y-12$$

On calcule les racines du trinôme. On trouve $\Delta = 49$, $y_1 = -4$ et $y_2 = 4$. L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\{-4;0;3\}}$.

(f) Résoudre $Q(x) = 0$ revient à résoudre $\dfrac{Q(x)}{x^3} = 0$ ou encore $\tilde{Q}(y) = 0$. Ce qui veut dire que

- Soit $x+\dfrac{1}{x} = 0$, ce qui est impossible.
- soit $x+\dfrac{1}{x} = 3$.
- soit $x+\dfrac{1}{x} = -4$.

(g) On résout les équations précédentes

$$x+\frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2-3x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$x+\frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2+4x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2+\sqrt{3} \text{ ou } x = -2-\sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines de } Q \text{ est } \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2};-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right\}.}$$

Problème :

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questions préliminaires

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2+2A$.
2. Montrer par l'absurde que la matrice A n'est pas inversible.

Une première méthode de calcul de A^n

3. Pour n entier naturel non nul, montrer qu' il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA+b_nA^2$.
Indication : l'une des deux relations de récurrence est $b_{n+1} = a_n+b_n$, l'autre est à déterminer.
4. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+2} = a_{n+1}+2a_n$.
5. En déduire a_n puis b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
6. Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Une deuxième méthode de calcul de A^n

7. Factoriser X^3-X^2-2X et donner ses trois racines.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier qu'il existe un polynôme $Q(X)$ et un polynôme $R(X) = aX^2+bX+c$ tel que :

$$X^n = Q(X)\left(X^3 - X^2 - 2X\right) + R(X) \qquad (*)$$

9. En prenant $X = A$ dans (*) et en se servant de la question préliminaire, calculer A^n en fonction de a, b, A et A^2.
10. En déduire qu'on a $c = 0$ puis $a - b = (-1)^n$ et $4a + 2b = 2^n$.
11. En déduire les valeurs de a et de b en fonction de n.

Une troisième méthode de calcul de A^n

On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
13. Déterminer D telle que $A = PDP^{-1}$.
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
15. Pour une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{E}(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM + MB = 0\}$. On cherche à déterminer la forme des matrices de $\mathcal{E}(A)$.
    (a) Soit $(M, N) \in \mathcal{E}(B)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λM et $M + N$ sont dans $\mathcal{E}(B)$.
    (b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que
    $$M \in \mathcal{E}(A) \Leftrightarrow N \in \mathcal{E}(D)$$
    (c) En posant $N = \begin{pmatrix} x & a & u \\ y & b & v \\ z & c & w \end{pmatrix}$, trouver la forme des matrices de $\mathcal{E}(D)$.
    (d) En déduire la forme des éléments de $\mathcal{E}(A)$.

Une application

On considère trois suites définies par $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n \\ z_{n+1} &= x_n \end{cases}$.

De plus, on note $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
2. A l'aide des résultats des parties précédentes, déterminer le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Questions préliminaires

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   enfin $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3$
2. On raisonne par l'absurde. Supposons que A soit inversible. Alors il existe une matrice B carrée d'ordre 3 telle que $AB = I$. Donc
   $$A^3B = (A^2 + 2A)B \Leftrightarrow A^2 = A + 2I$$
   ce qui est absurde d'après les calculs précédent. Donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$

Une première méthode de calcul de A^n

3. On raisonne par récurrence. Pour n entier naturel non nul, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n A^2$ ».
   Initialisation :
   Pour $n = 1$ on a $A^1 = 1A + 0A^2$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité :
   Soit $n \geq 1$ tel qu'il existe a_n et b_n réels avec $A^n = a_n A + b_n A^2$
   alors $A^{n+1} = A^n A = \left(a_n A + b_n A^2\right) A = a_n A^2 + b_n A^3 = a_n A^2 + b_n \left(A^2 + 2A\right) = 2b_n A + (a_n + b_n) A^2$
   Donc les réels $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ conviennent.

   Conclusion :
   : Pour tout entier non nul n, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n A^2$ et on a $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$
4. On combine les deux relations précédentes. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2a_n + 2b_n = 2a_n + a_{n+1}$.
5. On a une suite récurrente linéaire double (puisque $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).
   On résout $x^2 - x - 2 = 0$ qui donne deux solutions $x = -1$ et $x = 2$.
   On en déduit qu'il existe deux réels λ et μ, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$.
   De plus, $1 = a_1 = -\lambda + 2\mu$ et $0 = a_2 = \lambda + 4\mu$. En additionnant membre à membre les deux égalité, on trouve $1 = 6\mu$ d'où $\mu = \dfrac{1}{6}$ puis, en reportant cette valeur dans la seconde égalité, on obtient $\lambda = -4\mu = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = -\dfrac{2}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n$. Enfin, $b_n = \dfrac{1}{2}a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{3}(-1)^{n+1} + \dfrac{1}{6}2^{n+1}\right)$.
6. C'est du recopiage, en remplaçant a_n et b_n par ce qui précède

Une deuxième méthode de calcul de A^n

7. $X^3 - X^2 - 2X = X\left(X^2 - X - 2\right)$, le polynôme du second degré se factorise ($\Delta = 9, x_1 = -1, x_2 = 2$) donc l'expression factorisée est $X(X+1)(X-2)$. Les racines sont $0, -1$ et 2.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q(X)$ et un polynôme $R(X) = aX^2 + bX + c$ tel que :
   $$X^n = Q(X)\left(X^3 - X^2 - 2X\right) + R(X) \qquad (*)$$
   par le principe de division euclidienne qui impose $deg(R) < deg(X^3 - X^2 - 2X)$.
9. Comme $A^3 - A^2 - 2A = 0_3$, la matrice nulle, d'après la question préliminaire, on obtient $A^n = Q(A)0_3 + R(A)$ soit $A^n = aA^2 + bA + c$.
10. En se servant de la première question, on remplace successivement X par chacune des racines du diviseur.
    $X = 0$ dans (*) donne $0 = c$.
    $X = -1$ dans (*) donne $(-1)^n = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b$.
    $X = 2$ dans (*) donne $2^n = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 4a + 2b$.
11. En multipliant la seconde équation par 2 et en l'ajoutant membre à membre à la dernière, on obtient : $6a = 2(-1)^n + 2^n$ d'où $a = \dfrac{2(-1)^n + 2^n}{6}$
    Puis, la seconde égalité donne $b = a - (-1)^n = \dfrac{-4(-1)^n + 2^n}{6}$.

Une troisième méthode de calcul de A^n

12. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On résout $PX = B$. On trouve
    $$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

13. Un simple calcul donne $\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

14. Raisonnement par récurrence classique.

15. (a) $B(\lambda M) + (\lambda M)B = \lambda(BM + MB) = 0$, donc $\boxed{\lambda M \in \mathcal{E}(B)}$.
$B(M+N) + (M+N)B = BM + MB + BN + NB = 0 + 0 = 0$, donc $\boxed{M + N \in \mathcal{E}(B)}$.

(b)

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E}(A) &\Leftrightarrow MA + AM = 0 \Leftrightarrow MPDP^{-1} + PDP^{-1}M = 0 \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MPDP^{-1} + P^{-1}PDP^{-1}M = 0 \Leftrightarrow P^{-1}MPDP^{-1}P + DP^{-1}MP = 0 \\ &\Leftrightarrow ND + DN = 0 \Leftrightarrow \boxed{N \in \mathcal{E}(D)} \end{aligned}$$

(c) Soit $N = \begin{pmatrix} x & a & u \\ y & b & v \\ z & c & w \end{pmatrix}$.

$$ND + DN = \begin{pmatrix} -x & 0 & 2u \\ -y & 0 & 2v \\ -z & 0 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -a & -u \\ 0 & 0 & 0 \\ 2z & 2c & 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -a & u \\ -y & 0 & 2v \\ z & 2c & 4w \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$N \in \mathcal{E}(D) \Leftrightarrow x = a = y = v = c = z = w = 0$$

$\boxed{\text{Donc les matrices de } \mathcal{E}(D) \text{ sont de la forme } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$

(d) Les éléments de $\mathcal{E}(A)$ sont de la forme

$$M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3b & -3b \\ 0 & -3b & 3b \end{pmatrix}}$$

Une application

1. C'est du cours, ou presque...
2. En se servant des expressions explicites de A , A^2 et de U_0 et de la linéarité, on trouve $U_n = a_n A U_0 + b_n A^2 U_0 = a_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 3b_n \\ a_n + b_n \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ donc $x_n = a_n + 3b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit ensuite de remplacer a_n et b_n par leurs expressions explicites, ce qui donnera, après simplification : $x_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$.