Devoir Surveillé n° 2

Le 10/12/22 **Durée : 4 heures**

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice n°1

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = e\sqrt{u_n - 1} + 1$.

1. On étudie dans cette partie la fonction $f : x \to e\sqrt{x-1} + 1$. On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction f et le signe de f', puis tracer le tableau de variation.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (d) Montrer que $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in [1; 1 + e^2]$.
   (e) Donner l'équation de la tangente à f en $x = 1 + e^2$.
2. On considère $u_0 = 1 + e^2$. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. On cherche à déterminer une expression pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 > 1$. On pose alors

$$v_n = \ln(u_n - 1).$$

   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   (b) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}v_n$.
   (d) Exprimer v_n en fonction de n et de v_0.
   (e) En déduire u_n en fonction de n et de u_0.

Exercice n°2

On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad et \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

Etude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geq 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2\sqrt{n+1}-2$.

Etude de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Etudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $v_n \leq 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$.
5. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2-k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$.
6. Calculer, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$.
7. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

Etude de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

8. Etudier la monotonie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leq v_n$.

Exercice n°3

---

1. **Préliminaires**
   On définit une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes par : $P_1(X) = X \qquad P_2(X) = X^2 - 2$.
   et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,
   $$P_{k+1}(X) = XP_k(X) - P_{k-1}(X)$$
   (a) Déterminer les polynômes P_3 et P_4.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $y = x + \dfrac{1}{x}$. Calculer $P_1(y)$, $P_2(y)$ et $P_3(y)$.
   (c) Montrer par récurrence double que, pour tout entier $k > 0$, P_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité
   $$P_k(x + \frac{1}{x}) = x^k + \frac{1}{x^k}$$
2. **Un exemple particulier**
   On pose Q le polynôme défini par $Q(X) = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$.
   (a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.
   (b) Ecrire Qsous la forme $Q(X) = a_3X^3 + a_2(X^2+X^4) + a_1(X+X^5) + a_0(1+X^6)$, en précisant les valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3).
   (c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{Q(x)}{x^3} = 2 + P_3(y) + P_2(y) - 9P_1(y)$. (On rappelle que $y = x + \dfrac{1}{x}$).
   (d) On pose $\tilde{Q}(y) = 2 + P_3(y) + P_2(y) - 9P_1(y)$. Montrer que
   $$\tilde{Q}(y) = (y^3 - 3y) + (y^2 - 2) - 9y + 2$$

(e) Résoudre $\tilde{Q}(y) = 0$.

(f) En déduire alors que résoudre $Q(x) = 0$ est équivalent à résoudre pour tout réel x non nul, $x + \frac{1}{x} = 3$ et $x + \frac{1}{x} = 4$.

(g) Conclure sur les racines de Q.

Problème

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questions préliminaires

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer par l'absurde que la matrice A n'est pas inversible.

Une première méthode de calcul de A^n

3. Pour n entier naturel non nul, montrer qu' il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nA^2$.
   Indication : l'une des deux relations de récurrence est $b_{n+1} = a_n + b_n$, l'autre est à déterminer.
4. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.
5. En déduire a_n puis b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
6. Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Une deuxième méthode de calcul de A^n

7. Factoriser $X^3 - X^2 - 2X$ et donner ses trois racines.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier qu'il existe un polynôme $Q(X)$ et un polynôme $R(X) = aX^2 + bX + c$ tel que :
$$X^n = Q(X)\left(X^3 - X^2 - 2X\right) + R(X) \qquad (*)$$
9. En prenant $X = A$ dans (*) et en se servant de la question préliminaire, calculer A^n en fonction de a, b, A et A^2.
10. En déduire qu'on a $c = 0$ puis $a - b = (-1)^n$ et $4a + 2b = 2^n$.
11. En déduire les valeurs de a et de b en fonction de n.

Une troisième méthode de calcul de A^n

On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
13. Déterminer D telle que $A = PDP^{-1}$.
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
15. Pour une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{E}(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM + MB = 0\}$. On cherche à déterminer la forme des matrices de $\mathcal{E}(A)$.
    (a) Soit $(M, N) \in \mathcal{E}(B)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λM et $M + N$ sont dans $\mathcal{E}(B)$.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que

$$M \in \mathcal{E}(A) \Leftrightarrow N \in \mathcal{E}(D)$$

(c) En posant $N = \begin{pmatrix} x & a & u \\ y & b & v \\ z & c & w \end{pmatrix}$, trouver la forme des matrices de $\mathcal{E}(D)$.

(d) En déduire la forme des éléments de $\mathcal{E}(A)$.

Une application

On considère trois suites définies par $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} & = & x_n \\ z_{n+1} & = & x_n \end{array} \right.$.

De plus, on note $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
2. A l'aide des résultats des parties précédentes, déterminer le terme général de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.