Correction du Devoir Surveillé n° 3

07/01/23

Exercice 1 :

Pour tout réel $x > 0$, on pose : $g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$.

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$.
   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Démontrer que : $\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{x^2}h(x)g(x)$.
   (c) *On admet qu'il existe un unique réel* $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$ *tel que* $h(\alpha) = 0$.
   En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Démontrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = 1$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
5. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0$, $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$.
   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.
6. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. On suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$.

Partie I - Étude de la fonction g

1. Par opérations sur les limites,

$$\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

puis par composition avec l'exponentielle, on a donc

$$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

De même,

$$\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et il suit que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$h(x) = \ln(x) + 2x - 1.$$

   (a) La fonction h est somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle-même dérivable et, pour tout $x > 0$, on a
   $$h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$$
   ce qui permet d'affirmer que h est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) La fonction g est la composée, par une exponentielle, d'un produit de combinaison de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est encore dérivable sur ce même intervalle. Comme on a
   $$\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)' = \frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} = \frac{\ln(x) + 2x - 1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2},$$
   on a bien
   $$g'(x) = \left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)' \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \frac{h(x)}{x^2} g(x).$$

   (c) La question (2) nous donne le tableau de signes de $h(x)$, ce qui permet d'obtenir facilement celui de $g'(x)$ puis les variations de g.

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour $x > 0$,
$$g(x) = \exp(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}) = \exp(\ln(x^2))\exp(-\frac{\ln(x)}{x}) = x^2 \exp(-\frac{\ln(x)}{x})$$
   Donc
   $$\frac{g(x)}{x^2} = \exp(-\frac{\ln(x)}{x})$$
   Or par croissances comparées
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$
   donc par composition
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = 1$$

Partie II - Étude d'une suite récurrence

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = g(u_n).$$

4. Comme demandé, on procède par récurrence.

   - <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, u_0 est donné et par hypothèse est strictement positif.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et soit strictement positif. En particulier u_n est dans le domaine de définition de g et $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini. De plus,

$$u_{n+1} = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) > 0$$

(une exponentielle est toujours strictement positive), ce qui termine cette récurrence facile.

5. (a) On reproduit directement le tableau de signe répondant à cette question triviale. Notant $A(x) = (x-1)\ln(x)$ on a

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$A(x)$	‖	$+$	0	$+$	

En particulier, pour tout $x > 0$, on a $(x-1)\ln(x) \geq 0$.

(b) Soit $x > 0$. On peut écrire

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{\exp(\ln(x))} = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) - \ln(x)\right) = \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right).$$

Or, $(x-1)\ln(x)/x \geq 0$ pour $x > 0$. Par composition avec l'exponentielle croissante, on a bien que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{g(x)}{x} \geq 1.$$

(c) La question précédente donne bien que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) \geq x$. L'égalité n'est vérifiée que lorsque $g(x)/x = 1$ c'est à dire lorsque

$$\frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0 \iff x = 1.$$

6. La question précédente, appliquée avec $x = u_n > 0$ permet de voir que

$$u_{n+1} = g(u_n) \geq u_n$$

et donc que la suite (u_n) est toujours croissante.

7. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

(a) On procède par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse donnée par le texte.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $1/2 \leq u_n \leq 1$. Attention, g n'est pas croissante sur tout l'intervalle (seulement entre α et 1 !). On fait une disjonction de cas.
  - Si $\alpha \leq u_n \leq 1$, alors, par croissance de g sur cet intervalle, on a

$$u_{n+1} = g(u_n) \leq g(1) = 1$$

  - Si $1/2 \leq u_n < \alpha$, alors par décroissance de g,

$$u_{n+1} = g(u_n) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Dans les deux cas, on a bien $u_{n+1} \leq 1$. Comme de plus (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} \geq u_n \geq 1/2$ dans tous les cas. La récurrence est terminée.

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique associée à la fonction f.

1. Donner le domaine de définition D_f de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f. On précisera les asymptotes éventuelles.
3. Etudier les variations de f. On donnera le tableau de variation complet.
4. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x dans D_f : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b)$.f Que peut-on en déduire graphiquement ?
6. Préciser le signe de $f(x) - (ax+b)$ et déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D} : y = ax + b$.
7. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[-5; 4]$ et ses asymptotes dans un repère orthonormé. On précisera des valeurs remarquables.(On donne $\sqrt{2} \approx 1.4$).
8. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

1. La fonction f est définie si $x + 1 \neq 0$, c'est à dire si $x \neq -1$.

   $\boxed{\text{Conclusion : } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

2. Nous allons regarder les limites en $-\infty$, $+\infty$, -1^- et -1^+.
   - En $-\infty$:
     On a pour le moment une forme indéterminée qu'il faut lever :
     $$f(x) = \frac{2-x^2}{x+1} = \frac{x^2(\frac{2}{x^2} - 1)}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{x(\frac{2}{x^2} - 1)}{1+\frac{1}{x}}$$
     Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} - 1 = -1$ et $\lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$.
     Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$
   - En $+\infty$:
     On reprend la même forme factorisée. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$.
     Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$
   - En -1^- :
     On sait que $\lim\limits_{x\to-1^-} 2 - x^2 = 1$ et que $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$. Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty}$
   - En -1^+ :
     On sait que $\lim\limits_{x\to-1^+} 2 - x^2 = 1$ et que $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$. Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty}$ $\Rightarrow$**On en déduit que la courbe représentative de $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.**

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour tout $x \neq -1$:
   $$f'(x) = \frac{-2x(x+1) - (2-x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 2 + x^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{(1+x)^2}$$
   Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du trinôme au numérateur. On a $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, donc le trinôme est strictement négatif sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$, et sur $]-1; +\infty[$. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

Deux polynômes sont égaux ssi ils ont même degré et mêmes coefficients, par conséquent :

$$\frac{2-x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & -1 \\ a+b & = & 0 \\ b+c & = & 2 \end{array}\right.$$

Finalement on trouve

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & -1 \\ b & = & 1 \\ c & = & 1 \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Conclusion : Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x+1}}$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) - (ax+b) = \dfrac{1}{x+1}$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0.}$

$\Rightarrow$ **On en déduit graphiquement que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $T_{-1} : y = -x + 1$.**

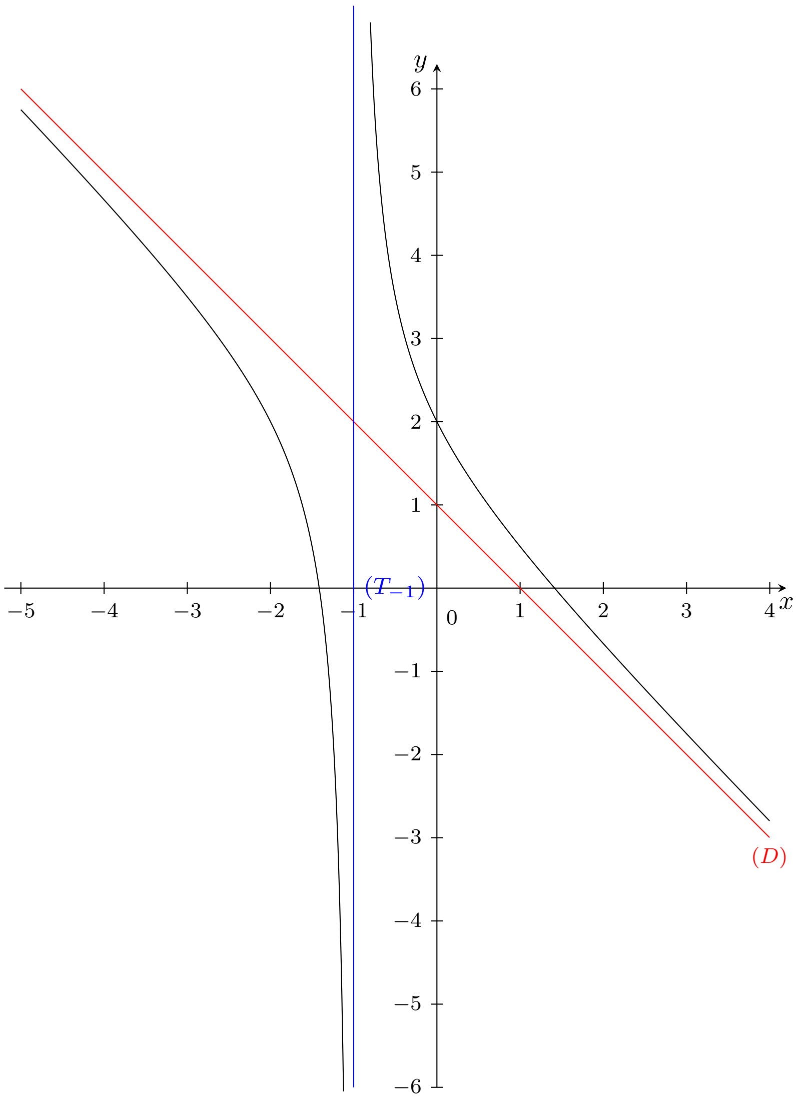
6.
   - Si $x < -1$, $\dfrac{1}{x+1} < 0$, donc $f(x) - (ax+b) < 0$.

     $\boxed{\text{Conclusion : Sur }]-\infty;-1[, \text{ la courbe } \mathcal{C}_f \text{ est en dessous de la droite } \mathcal{D}.}$

   - Si $x > -1$, $\dfrac{1}{x+1} > 0$, donc $f(x) - (ax+b) > 0$.

     $\boxed{\text{Conclusion : Sur }]-1;+\infty[, \text{ la courbe } \mathcal{C}_f \text{ est au dessus de la droite } \mathcal{D}.}$

7. Voici la représentation graphique :



8. On a vu que la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ Comme $0 \in]-\infty,+\infty[$ le théorème de la bijection nous assure que :

$$\exists ! c \in]-\infty;-1[, f(c)=0$$

De la même façon, f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ Comme $0 \in]-\infty,+\infty[$ le théorème de la bijection nous assure que :

$$\exists ! c_2 \in]-1;+\infty[, f(c_2)=0$$

$\boxed{\text{Conclusion : L'équation } f(x)=0 \text{ admet deux solutions.}}$

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$, $u_1=1$, et pour tout entier n :

$$u_{n+2}=\frac{u_{n+1}u_n}{2u_{n+1}+u_n} \qquad \text{et} \qquad v_n=\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_n}$$

1. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Précisez sa raison et son terme initial.
   (b) En déduire, pour tout entier n, l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Montrer que pour $n\geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_k = 1-(-2)^n$.

2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_k = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n} + 2$.

   (b) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_{n+1}u_n}{2u_{n+1}+u_n}} + \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_{n+1}+u_n}{u_{n+1}u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_{n+1}}{u_{n+1}u_n} + \frac{u_n}{u_{n+1}u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2}{u_n} + \frac{2}{u_{n+1}} = 2v_n$$

   Donc la suite (v_n) est géométrique, de raison 2, et de terme initial $v_0 = \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$.

   (b) Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times 2^n$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \times 3 \times 2^k = 3\sum_{k=0}^{n-1}(-2)^k \\ &= 3 \times \left(\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}\right) = \boxed{1-(-2)^n} \end{aligned}$$

2. **<u>Initialisation :</u>**

   Pour $n = 1$ on a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_k = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k v_k = (-1)^0 v_0 = 3$, et d'autre part

   $$\frac{(-1)^{n+1}}{u_n} + 2 = \frac{(-1)^2}{u_1} + 2 = \frac{1}{1} + 2 = 3$$

   <u>Hérédité :</u>

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_k = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n} + 2$. Montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k = \frac{(-1)^{n+2}}{u_{n+1}} + 2$.

   $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_k + (-1)^n v_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{u_n} + 2 + (-1)^n\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 + \frac{(-1)^{n+2}}{u_{n+1}} + (-1)^n\left(-\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n}\right) \qquad \text{car } (-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n = \boxed{\frac{(-1)^{n+2}}{u_{n+1}} + 2} \end{aligned}$$

   <u>Conclusion :</u>

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_k = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n} + 2$.

3. En combinant les questions 1c) et 2a), on trouve

   $$1-(-2)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n} + 2$$

   Donc

   $$u_n = \frac{-1-(-2)^n}{(-1)^{n+1}} = \frac{1+(-2)^n}{(-1)^n} = \frac{1}{(-1)^n} + \frac{(-2)^n}{(-1)^n} = \boxed{(-1)^n + 2^n}$$

Exercice 4 :

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(X^2) = (X^3+1)P(X)\right\}$.

1. Vérifier que le polynôme nul appartient à $\mathcal{E}$. Le polynôme $Q = X^2 + 1$ appartient-il à $\mathcal{E}$?
2. Soit P un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ appartenant à $\mathcal{E}$.
   (a) Démontrer que $n = 3$.
   (b) Démontrer que $P(1) = 0$.
   (c) En dérivant la relation $P(X^2) = (X^3+1)P(X)$, établir que $P'(0) = P''(0) = 0$.
   (d) En déduire qu'il existe un réel non nul a tel que $P(X) = a(X^3 - 1)$.

3. Réciproquement : démontrer que s'il existe un réel a tel que $P(X) = a(X^3 - 1)$ alors $P \in \mathcal{E}$.4
4. Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathcal{E}$.

1. Si P est le polynôme nul, alors $P(X^2) = 0$ et $(X^3 + 1)P(X) = (X^3 + 1) \times 0 = 0$, et l'égalité est vérifiée. Donc le polynôme nul appartient à $\mathcal{E}$.

   Par ailleurs
$$Q(X^2) = (X^2)^2 + 1 = X^4 + 1$$
   et
$$(X^3 + 1)(X^2 + 1) = X^5 + X^3 + X^2 + 1$$
   L'égalité n'est pas vérifiée, donc Q n'appartient pas à $\mathcal{E}$.
2. (a) Comme P n'est pas le polynôme nul, $n \neq -\infty$ et $\deg(P(X^2) = 2n$, $\deg((X^3 + 1)P(X)) = \deg(X^3 + 1) + \deg(P) = n + 3$, donc on a $2n = n + 3$, et il vient $\boxed{n = 3}$.
   (b) En remplaçant par $X = 1$ dans la relation, on obtient $P(1) = 2P(1)$, donc $P(1) = 0$.
   (c) La dérivée de $P(X^2)$ est $2XP'(X)$, et celle de l'autre membre est $3X^2P(X) + (X^3 + 1)P'(X)$. On obtient la relation
$$2XP'(X) = 3X^2P(X) + (X^3 + 1)P'(X) \Leftrightarrow (2X - X^3 - 1)P'(X) = 3X^2P(X)$$
   En prenant $X = 0$ dans cette relation, on trouve
$$-P'(0) = 0$$
   donc $\boxed{P'(0) = 0.}$ En dérivant une nouvelle fois, on obtient
$$(2 - 3X^2)P'(X) + (2X - X^3 - 1)P''(X) = 6XP(X) + 3X^2P'(X)$$
   En prenant $X = 0$ dans cette relation, on trouve
$$2P'(0) - P''(0) = 0$$
   et comme $P'(0) = 0$, $\boxed{P''(0) = 0}$.
   (d) Comme P est de degré 3, on peut l'écrire sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et ainsi $P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c$, $P''(X) = 6aX + 2b$. Les relations $P(1) = P'(0) = P''(0) = 0$ donnent :
$$\begin{cases} a & +b & +c & +d & = & 0 \\ & & c & & = & 0 \\ & & & 2b & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$
   Ainsi $P(X) = aX^3 - a = \boxed{a(X^3 - 1)}$
3. Si $P(X) = a(X^3 - 1)$, alors d'une part
$$P(X^2) = (X^6 - 1)$$
   et d'autre part
$$(X^3 + 1)P(X) = (X^3 + 1)a(X^3 - 1) = a(X^6 - 1)$$
   L'égalité est vérifiée, donc P appartient à $\mathcal{E}$.
4. La combinaison des résultats précédents nous donne que
$$\boxed{\mathcal{E} = \{0\} \cup \{a(X^3 - 1) \mid a \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 5 :

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an.
Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est égale à $3/4$ et la probabilité de donner une fleur blanche est égale à $1/4$.
Puis les années suivantes, pour tout entier naturel non nul :

- Si l'année n la plante a donné une fleur rose, alors elle donnera une fleur rose l'année $n+1$.
- Si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche l'année $n+1$.

n désigne un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n la probabilité de l'événement R_n "la plante donne une fleur rose la n ième année ".
Les questions 1,2,3 et 4 sont indépendantes.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \dfrac{p_n}{2} + \dfrac{1}{2}$.
   (b) Donner la valeur de p_n en fonction de n et en déduire la limite de (p_n) en $+\infty$.
   (c) Déterminer un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\quad 1 - p_n < 10^{-3}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose A_n l'évènement "la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ". Exprimer, en justifiant, A_n en fonction des $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$, puis calculer $P(A_n)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose B_n l'évènement "la plante donne pour la première fois une fleur rose la n-ième année ". Exprimer, en justifiant, B_n en fonction des $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$, puis calculer $P(B_n)$.
4. Un client achète 10 plantes. On note P_i l'évènement " la plante i donne une fleur blanche la première année". Quelle est la probabilité qu'au moins une des 10 plantes donne une fleur blanche la première année ?

---

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(R_n, \overline{R_n})$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles.

$$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = P_{R_n}(R_{n+1})P(R_n) + P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})P(\overline{R_n}) = p_n + (1-p_n) \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{p_n}{2} + \frac{1}{2}}$$

   (b) La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique. On résout son équation caractéristique :

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = p_n - 1$.

$$v_{n+1} = p_{n+1} - 1 = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(p_n - 1) = \frac{v_n}{2}$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $v_1 = p_1 - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = v_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \boxed{p_n = 1 - \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

   Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et ainsi $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = 1.}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1 - p_n < 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-3}$$

   Comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ceci est équivalent à

$$(n-1)\ln(\frac{1}{2}) < \ln(4.10^{-3}) \Leftrightarrow -(n-1)\ln(2) < \ln(4.10^{-3}) \Leftrightarrow n > 1 - \frac{\ln(4.10^{-3})}{\ln(2)}$$

   On pose $n_0 = \lfloor 1 - \dfrac{\ln(4.10^{-3})}{\ln(2)} \rfloor + 1$. On a ainsi déterminé n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $1 - p_n < 10^{-3}$.

2. On cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n)$. D'après la formule des probabilités composées

$$P(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)....P_{R_1\cap...\cap R_{n-1}}(R_n) = \frac{3}{4} \times 1 \times 1 \times ... \times 1 = \boxed{\frac{3}{4}}$$

3. On cherche à présent $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap ... \cap \overline{R_n})$. D'après la formule des probabilités composées

$$P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap ... \cap \overline{R}_n) = P(\overline{R}_1)P_{\overline{R}_1}(\overline{R}_2)....P_{\overline{R}_1 \cap ... \cap \overline{R}_{n-1}}(\overline{R}_n) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times ... \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

4. On cherche ici $P(P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{10})$. D'après les lois de Morgan,

$$P(P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{10}) = 1 - P(\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap ... \cap \overline{P}_{10})$$

Les évènements P_i, $i \in [|1;10|]$ sont mutuellement indépendants, donc

$$P(\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap ... \cap \overline{P}_{10}) = P(\overline{P_1}) \times P(\overline{P_2}) \times ... \times P(\overline{P_{10}}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

Donc

$$\boxed{P(P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}}$$

Problème :

Partie I : Etude d'une matrice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
2. Montrer que $P^{-1}AP$ est égale à une matrice D diagonale.
3. En déduire une relation en D et P^{-1} ,A et P, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Donner l'expression de A^n en fonction de n.

Partie II : Etude probabiliste

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de la consommation de produits référencés se partageant un marché : X, Y et Z.
On introduit les évènements suivants :

- X_n : "le consommateur adopte le produit X au n-ième mois."
- Y_n : "le consommateur adopte le produit Y au n-ième mois."
- Z_n : "le consommateur adopte le produit Z au n-ième mois."

et on note $x_n = P(X_n)$, $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$.

On début de l'étude on a constater que 10% des consommateurs adoptaient le produit X, 20% le produit Y et 70% le produit Z. De nombreux sondages mensuels ont par la suite permis de déterminer les intentions des consommateurs :

- Utilisant le produit X un mois donné, 40% des consommateurs l'utiliseront le mois prochain, 30% opteront pour le produit Y et 30% opteront pour le produit Z.
- Utilisant le produit Y un mois donné, 40% des consommateurs l'utiliseront le mois prochain, 30% opteront pour le produit X et 30% opteront pour le produit Z.
- Utilisant le produit Z un mois donné, 70% des consommateurs l'utiliseront le mois prochain, 20% opteront pour le produit X et 10% opteront pour le produit Z.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
2. Quelle relation vérifient pour tout $n \geq 0$ les quantités x_n y_n et z_n ?
3. En déduire une expression de x_{n+1}, y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
4. On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.

5. Déterminer la matrice $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ telle que $C = AC + B$.
6. On considère la matrice $V_n = U_n - C$. Donner une relation entre V_{n+1} et V_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n = A^n V_0$.
7. En déduire les valeurs de x_n et y_n en fonction de n.
8. Calculer z_n en fonction de n.
9. Etudier la convergence des suites (x_n), (y_n) et (z_n). Comment cela peut-il s'interpréter dans le contexte de l'exercice ?

Partie I : Etude d'une matrice

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On résout $PX = B$.

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & = a \\ -x & +2y & = b \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x & +y & = & a \\ & 3y & = & b + a \end{cases}$$

Le système associé à P est équivalent à un système triangulaire supérieur de coefficients diagonaux non nuls, donc il est de Cramer et P est donc inversible.

$$\begin{cases} x & +y & = & a \\ & 3y & = & b + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2a-b}{3} \\ y = \frac{b+a}{3} \end{cases}$$

On trouve ainsi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Après simple calcul, on trouve

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

3. $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$. On montre ensuite par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$.
Initialisation :
Pour $n = 0$, on a $A^0 = D^0 = I_2$ donc $PD^nP^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$. La proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. En utilisant cette hypothèse on obtient

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

La proposition est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.1^n & 0 \\ 0 & 0.4^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \times 0,1^n + 0,4^n & -0,1^n + 0,4^n \\ -2 \times 0,1^n + 2 \times 0,4^n & 0,1^n + 2 \times 0,4^n \end{pmatrix}$$

Partie II :Etude probabiliste

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le système (X_n, Y_n, Z_n) est un système complet d'évènements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} x_{n+1} = P(X_{n+1}) &= P_{X_n}(X_{n+1})p(X_n) + P_{Y_n}(X_{n+1})P(Y_n) + P_{Z_n}(X_{n+1})P(Z_n) \\ &= 0.4x_n + 0.3y_n + 0.2z_n \end{aligned}$$

En raisonnant de façon analogue, on trouve

$$y_{n+1} = 0.3x_n + 0.4y_n + 0.1z_n$$

$$z_{n+1} = 0.3x_n + 0.3y_n + 0.7z_n$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme (X_n, Y_n, Z_n) est un SCE, on a la relation $x_n + y_n + z_n = 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $z_n = 1 - x_n - y_n$. En remplaçant dans les expressions précédentes on trouve

$$x_{n+1} = 0.4x_n + 0.3y_n + 0.2(1 - x_n - y_n) = 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2$$
$$y_{n+1} = 0.3x_n + 0.4y_n + 0.1(1 - x_n - y_n) = 0,2x_n + 0,3y_n + 0,1$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$AU_n + B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2 \\ 0,2x_n + 0,3y_n + 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

5. Soit $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$C = AC + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,2a + 0,1b + 0,2 \\ b = 0,2a + 0,3b + 0,1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,8a + 0,1b + 0,2 = 0 \\ 0,2a - 0,7b + 0,1 = 0 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow 4L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -0,8a & +0,1b & +0,2 & = 0 \\ & -2,7b & +0,6 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5/18 \\ b = 2/9 \end{cases}$$

On obtient ainsi $C = \dfrac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - C = AU_n - B + AC + B = A(U_n - C) = AV_n$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$.

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_2$ donc $A^0 V_0 = V_0$. La proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que$V_n = A^n V_0$. En utilisant cette hypothèse et l'expression trouvée précédemment, on obtient

$$V^{n+1} = AV_n = A \times A^n V_0 = A^{n+1} V_0$$

La proposition est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$.

7. D'après les questions précédentes, comme $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} - \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{45} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$U_n = V_n + C = A^n V_0 + C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 0,1^n + 0,4^n & -0,1^n + 0,4^n \\ -2 \times 0,1^n + 2 \times 0,4^n & 0,1^n + 2 \times 0,4^n \end{pmatrix} \times \frac{-1}{45} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On trouve donc, après simplifications, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = -\frac{1}{45}\left(5 \times 0,1^n + 3 \times 0,4^n\right) + \frac{5}{18} \qquad y_n = -\frac{1}{45}\left(-5 \times 0,1^n + 6 \times 0,4^n\right) + \frac{2}{9}$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 1 - x_n - y_n$ donc $z_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{45} \times (9 \times 0,4^n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{0,4^n}{5}$.
9. Comme $-1 < 0,1 < 0,4 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,4^n = 0$, on trouve ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{5}{18} \qquad \lim_{n \to +\infty} y_n = \frac{2}{9} \qquad \lim_{n \to +\infty} z_n = \frac{1}{2}$$

A long terme, 50% des consommateurs opteront pour le produit Z, environ $22,22\%$ pour le produit Y et le reste d'entre eux ira vers le produit X.