Devoir Surveillé n° 3

Le 07/01/23 **Durée : 4 heures**

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice n°1

Pour tout réel $x > 0$, on pose : $g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$.

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$.
   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Démontrer que : $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}h(x)g(x)$.
   (c) *On admet qu'il existe un unique réel $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$ tel que $h(\alpha) = 0$.*
   En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x^2} = 1$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
5. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0$, $\dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.
   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.
6. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. On suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Exercice n°2

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique associée à la fonction f.

1. Donner le domaine de définition D_f de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f. On précisera les asymptotes éventuelles.
3. Etudier les variations de f. On donnera le tableau de variation complet.
4. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x dans D_f : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
6. Préciser le signe de $f(x)-(ax+b)$ et déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D} : y = ax+b$.
7. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[-5;4]$ et ses asymptotes dans un repère orthonormé. On précisera des valeurs remarquables.(On donne $\sqrt{2} \approx 1.4$).
8. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice n°3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = 1$, et pour tout entier n :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}u_n}{2u_{n+1}+u_n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}$$

1. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Précisez sa raison et son terme initial.
   (b) En déduire, pour tout entier n, l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Montrer que pour $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_k = 1-(-2)^n$.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k v_k = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n} + 2$.
   (b) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n.

Exercice n°4

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(X^2) = (X^3+1)P(X)\right\}$.

1. Vérifier que le polynôme nul appartient à $\mathcal{E}$. Le polynôme $Q = X^2+1$ appartient-il à $\mathcal{E}$?
2. Soit P un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ appartenant à $\mathcal{E}$.
   (a) Démontrer que $n = 3$.
   (b) Démontrer que $P(1) = 0$.
   (c) En dérivant la relation $P(X^2) = (X^3+1)P(X)$, établir que $P'(0) = P''(0) = 0$.
   (d) En déduire qu'il existe un réel non nul a tel que $P(X) = a(X^3-1)$.
3. Réciproquement : démontrer que s'il existe un réel a tel que $P(X) = a(X^3-1)$ alors $P \in \mathcal{E}$.4
4. Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathcal{E}$.

Exercice n°5

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an.
Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est égale à $3/4$ et la probabilité de donner une fleur blanche est égale à $1/4$.
Puis les années suivantes, pour tout entier naturel non nul :

- Si l'année n la plante a donné une fleur rose, alors elle donnera une fleur rose l'année $n+1$.
- Si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche l'année $n+1$.

n désigne un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n la probabilité de l'événement R_n "la plante donne une fleur rose la n ième année ".
Les questions 1,2,3 et 4 sont indépendantes.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \dfrac{p_n}{2} + \dfrac{1}{2}$.
   (b) Donner la valeur de p_n en fonction de n et en déduire la limite de (p_n) en $+\infty$.
   (c) Déterminer un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\quad 1 - p_n < 10^{-3}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose A_n l'évènement "la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ". Exprimer, en justifiant, A_n en fonction des $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$, puis calculer $P(A_n)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose B_n l'évènement "la plante donne pour la première fois une fleur rose la n-ième année ". Exprimer, en justifiant, B_n en fonction des$(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$, puis calculer $P(B_n)$.
4. Un client achète 10 plantes. On note P_i l'évènement " la plante i donne une fleur blanche la première année". Quelle est la probabilité qu'au moins une des 10 plantes donne une fleur blanche la première année ?

Problème

Partie I : Etude d'une matrice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
2. Montrer que $P^{-1}AP$ est égale à une matrice D diagonale.
3. En déduire une relation en D et P^{-1} ,A et P, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Donner l'expression de A^n en fonction de n.

Partie II : Etude probabiliste

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de la consommation de produits référencés se partageant un marché : X, Y et Z.
On introduit les évènements suivants :

- X_n : "le consommateur adopte le produit X au n-ième mois."
- Y_n : "le consommateur adopte le produit Y au n-ième mois."
- Z_n : "le consommateur adopte le produit Z au n-ième mois."

et on note $x_n = P(X_n)$, $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$.

On début de l'étude on a constater que 10% des consommateurs adoptaient le produit X, 20% le produit Y et 70% le produit Z. De nombreux sondages mensuels ont par la suite permis de déterminer les intentions des consommateurs :

- Utilisant le produit X un mois donné, 40% des consommateurs l'utiliseront le mois prochain, 30% opteront pour le produit Y et 30% opteront pour le produit Z.

- Utilisant le produit Y un mois donné, 40% des consommateurs l'utiliseront le mois prochain, 30% opteront pour le produit X et 30% opteront pour le produit Z.
- Utilisant le produit Z un mois donné, 70% des consommateurs l'utiliseront le mois prochain, 20% opteront pour le produit X et 10% opteront pour le produit Z.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
2. Quelle relation vérifient pour tout $n \geq 0$ les quantités x_n y_n et z_n ?
3. En déduire une expression de x_{n+1}, y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
4. On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.
5. Déterminer la matrice $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ telle que $C = AC + B$.
6. On considère la matrice $V_n = U_n - C$. Donner une relation entre V_{n+1} et V_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n = A^n V_0$.
7. En déduire les valeurs de x_n et y_n en fonction de n.
8. Calculer z_n en fonction de n.
9. Etudier la convergence des suites (x_n), (y_n) et (z_n). Comment cela peut-il s'interpréter dans le contexte de l'exercice ?