Correction du Devoir Surveillé n° 4

04/03/23

Exercice 1 :

Exercice 1

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \qquad \text{et} \qquad f(0) = -1$$

ainsi que la fonction φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x).$$

On donne un tableau de valeurs de f :

$x =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x) \approx$	-0,4	0	0,6	1,6	3	4,7	6,9	9,5

1. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Dresser le tableau de variation de f', puis celui de f. On précisera $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variations de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
6. On souhaite étudier pour tout entier naturel k, les solutions de l'équation $f(x) = k$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera x_k.
   (b) Donner la valeur de x_0.
   (c) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
   (d) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1}, puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.
7. (a) Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) On donne $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,73$ et $\varphi(2) = 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2};2\right]$.
   (c) En étudiant les variations de φ', montrer que $\forall x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$.
   (d) Montrer que $\varphi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 1$. En déduire que x_1 est l'unique solution de $x = \varphi(x)$.
8. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
   (b) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) Comment choisir n pour que $|u_n - x_1| \leq 10^{-5}$?

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, & f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \\ & f(0) = -1 \end{cases}$$

1. Les fonctions $x \to x^2$, $x \to \ln(x)$ et $x \to x$ sont toutes C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, alors par somme et produit, $\boxed{f \text{ est } C^2 \text{sur } \mathbb{R}^{*,+}}$

2. Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$

   donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

3. Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{*,+}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = 2x - (\ln x + 1), \quad f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

   Ainsi :sur $\mathbb{R}^{+*}$,f'' s'annule et change de signe en $x = \dfrac{1}{2}$.
   Dans un premier temps, on en déduit également le tableau de variations de $f\ '$:

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

$$f\prime(1/2) = 1 - \left(\ln \frac{1}{2} + 1\right) = \ln 2$$

   Dans un second temps, on en déduit également le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}\right), \ln x =_{+\infty} o(x) \quad donc : \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;$$

4. La fonction f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, à valeurs dans J=$]-1, +\infty[$ *donc* d'après le théorème de la bijection $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}^{+*} \text{ sur } J.}$

5. $\boxed{\text{L'application réciproque } f^{-1} \text{ est alors continue et strictement croissante sur } J \text{ , à valeurs dans }]0;+\infty[}$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

6. (a) Pour tout entier naturel k, k$\in J$ et f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur J donc il existe un unique réel x_k (strictement)positif tel que :

$$f(x_k) = k$$

   (b) Par définition,x_0 est l'unique solution de $f(\ x) = 0$ .Or $f(1)$=0 donc $\boxed{x_0 = 1}$.

   (c) Le tableau de valeurs permet de lire :$f(1.5) = 0.6, f(2) = 1.6$. Or x_1 est l'unique solution de $f(\ x) = 1$ et f continue,strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$ donc : $\boxed{1.5 < x_1 < 2}$.

   et de même $f(2) = 1.6, f(2.5) = 3$, x_2 est l'unique solution de $f(\ x) = 2$: $\boxed{\text{donc : } 2 < x_2 < 2.5}$.
   .

   (d) $\forall k \in \mathbb{N}$,$f(x_k) = k \Leftrightarrow x_k$=$f^{-1}(k)$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $k < k+1$ et f^{-1} strictement croissante sur J donc $f^{-1}($ $k) < f^{-1}(k+1) \Leftrightarrow x_k < x_{k+1}$ donc $\boxed{\text{la suite } (x_k) \text{ est croissante.}}$

$$\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty, x_k = f^{-1}(k) \Longrightarrow \lim_{k \to +\infty} x_k = +\infty$$

7. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

(a) La fonction φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \varphi'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2+x}{x^2}$.
Tableau de variation de φ :

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

, $\dfrac{2}{x} + \ln(x) = \dfrac{2 + x\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$

(b) φ continue , strictement décroissante sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ donc $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]\right) = \left[\varphi(2), \varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$.*Or* $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) < 2, \varphi(2) > \dfrac{3}{2}$ donc $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi''(x) = \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4-x}{x^3}$.
Tableau de variation de φ' :

x	0		$\frac{3}{2}$		2		4		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|$		$+$				0	$-$	
$\varphi(x)$	$\|$	$-\infty \nearrow$	$-\frac{2}{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/8$	$\searrow$	0

, $\varphi'(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{-2+3/2}{9/4} = -\dfrac{2}{9}$
donc : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right], -\dfrac{2}{9} \leq \varphi'(x) \leq 0$

$$donc : \forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$$

(d) $\forall x > 0, x = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{x} + \ln x \Leftrightarrow x^2 = 2 + x\ln x \Leftrightarrow f(x) = 1$ .Or le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 1$, donc $\boxed{x_1 \text{ est aussi l'unique solution de l'équation : } x = \varphi(x)}$.

8. (a) Montrons par une récurence rapide que :$\forall n \in \mathbb{N}$,$\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$
Initialisation :

$u_0 = \dfrac{3}{2}$ donc la relation est vraie pour $n = 0$
Hérédité :
Supposons qu'au rang n, $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ alors d'après la question 8.b.$\dfrac{3}{2} \leq \varphi(u_n) \leq 2$
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$, ce qui prouve l'hérédité.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ,\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2}$

(b) Montrons par récurence sur l'entier n,$|u_n - x_1| \leq \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$,$\forall n \in \mathbb{N}$ **Initialisation :** Pour $n = 0$, $|u_0 - x_1| = \left|\dfrac{3}{2} - x_1\right|$ or $x_1 \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right] \Longrightarrow |u_0 - x_1| \leq 0.5 < \left(\dfrac{2}{9}\right)^0$, donc la relation est vraie au rang $n = 0$
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'au rang n, $|u_n - x_1| \leq \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$.

Alors $\dfrac{2}{9}|u_n - x_1| \leq \left(\dfrac{2}{9}\right)^{n+1}$.

Or $|u_{n+1} - x_1| \leq \dfrac{2}{9}|u_n - x_1|$ donc $|u_{n+1} - x_1| \leq \left(\dfrac{2}{9}\right)^{n+1}$
La relation est donc héréditaire.
Conclusion :

$$\boxed{|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n ,\forall n \in \mathbb{N}}$$

(c) $-1 < \dfrac{2}{9} < 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{9}\right)^n = 0$, par le théorème de l'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_1| = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_1.}$

(d) Il suffit de déterminer n tel que $\left(\dfrac{2}{9}\right)^n \leq 10^{-5}$.

$$\left(\frac{2}{9}\right)^n \leq 10^{-5} \Leftrightarrow n\ln(2/9) \leq -5\ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{5\ln(10)}{\ln(9)-\ln(2)}$$

Donc $\boxed{\text{pour } n \geq \lfloor\dfrac{5\ln(10)}{\ln(9)-\ln(2)}\rfloor + 1,\ \left(\dfrac{2}{9}\right)^n \leq 10^{-5} \text{ et en particulier } |u_n - x_1| \leq 10^{-5}.}$

Exercice 2 :

On considère deux urnes :

- une urne rouge, composée de deux balles rouges et deux balles bleues.
- une urne bleue, composée d'une balle rouge et de trois balles bleues.

Le but de l'exercice est d'étudier deux jeux de tirage dans ces urnes, avec ou sans remise. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'évènement "on tire une balle rouge au n-ième tirage", et B_n l'évènement : "on tire une balle bleue au n-ième tirage". Le premier tirage s'effectue toujours dans l'urne rouge ;puis le tirage numéro n s'effectuera dans l'urne de la couleur de la balle obtenue au tirage numéro $n-1$. On suppose qu'il y a équiprobabilité du choix des différentes balles.

Les parties A et B sont indépendantes entre elles.

Partie A

Dans cette partie, on effectue une succession de tirages avec remise, selon le protocole décrit au début de l'exercice. On notera égaelement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = P(R_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $P(R_n) \neq 0$ et que $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_{n+1} = \dfrac{1}{4}r_n + \dfrac{1}{4}$.
3. En déduire le terme général de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis celui de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie B

Dans cette partie, on effectue trois tirages successifs sans remise selon le protocole décrit précédemment.

4. Justifier que $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{3}$. Déterminer également $P_{B_1}(R_2)$.
5. Calculer $P(R_2)$.
6. Calculer $P_{R_2}(R_1)$.
7. Que dire de l'évènement $R_1 \cap R_2 \cap R_3$?
8. Pour $n \in [|0;3|]$, on note A_n l'évènement "obtenir n boules rouges au cours de ces trois tirages".
   (a) Que vaut $P(A_3)$? Justifier.
   (b) Déterminer $P_{B1\cap B_2}(B_3)$. En déduire $P(A_0)$.
   (c) Calculer $P(A_1)$, puis $P(A_2)$.
   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} kP(A_k)$.

1. Le tirage s'effectue avec remise, donc les deux urnes contiendront toujours au moins une balle rouge, donc $\boxed{P(R_n) \neq 0.}$
   Si l'évènement R_n s'est réalisé, c'est donc que l'on a tiré une voule rouge au $n$ième tirage, et que le tirage suivant se fait dans l'urne rouge, dans laquelle il y a deux bleues et deux rouges. Ainsi :
   $$P_{R_n}(R_{n+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(R_n, \overline{R_n})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, donc d'après la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} r_{n+1} = P(R_{n+1}) &= P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n})P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}(1-r_n) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$
3. La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique. On résout l'équation caractéristique :
   $$x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = r_n - \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= r_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}r_n - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left(r_n - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(r_n - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \times u_n
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de terme initial $u_1 = r_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\boxed{r_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}; \quad b_n = 1 - r_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

4. Les tirages se font maintenant sans remise. Si R_1 s'est réalisé, c'est donc qu'on a tiré une boule rouge dans l'urne rouge, et que le deuxième tirage se fera également dans l'urne rouge. Il y reste trois boules dont une rouge, donc $\boxed{P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{3}.}$

   De la même façon, on établit que $\boxed{P_{B_1}(R_2) = \frac{1}{4}.}$

5. La famille (R_1, B_1) est un système complet d'événements de probabilités non nulles, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(R_2) &= P(R_1)P_{R_1}(R_2) + P(B_1)P_{B_1}(R_2) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{24}}
\end{aligned}$$

6. Avec la formule de Bayes, on trouve

$$P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1)P_{R_2}(R_1)}{P(R_2} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{24}{42} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

7. L'évènement $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ est impossible car les tirages se font sans remise, en commençant dans l'urne rouge, dans laquelle il n'y a que deux boules rouges. On ne pourra donc pas en tirer trois de suite.

$$\boxed{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 0}$$

8. (a) D'après la question précédente, $P(A_3) = 0$.

   (b) Si l'évènement $B_1 \cap B_2$ s'est réalisé, c'est que l'on a tiré une boule bleue dans l'urne rouge au début, puis une bleue dans l'urne bleue, et que le troisième tirage se fait dans l'urne bleue dans laquelle il reste une boule rouge et deux bleues. Ainsi

$$P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{2}{3}$$

   On cherche à présent $P(A_0) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$. La formule des probabilités composées donne alors

$$P(A_0) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

   (c) L'évènement A_1 se réalise si on tire une rouge et deux bleues au cours des trois tirages. Cette boule rouge peut apparaitre à n'importe lequel des tirages, ainsi

$$A_1 = (R_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap R_3)$$

Les évènements entre parenthèses sont deux à deux incompatibles, donc

$$P(A_1) = P(R_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$$

et en utilisant à nouveau la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1) &= P(R_1)P_{R_1}(B_2)P_{R_1\cap B_2}(B_3) + P(B_1)P_{B_1}(R_2)P_{B_1\cap R_2}(B_3) + P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(R_3) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \\
&= \boxed{\frac{5}{12}}
\end{aligned}$$

La famille (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'évènements, donc

$$P(A_2) = 1 - P(A_0) - P(A_1) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

item

$$\sum_{k=0}^{3} kP(A_k) = P(A_1) + 2P(A_2) = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \boxed{\frac{13}{12}}$$

Problème :

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
   (a) Déterminer $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.
   (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = f(n)$.
   (d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
   (b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
   En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (c) Montrer que pour tout réel x positif,
   $$x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$$
   (d) En déduire que la série de terme général $(v_{n+1} - v_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
   On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
   (e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
   En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers γ.
3. (a) Déterminer $\lim_{n \to \infty} u_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{n}$

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

1. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq \frac{1}{n^2}$
   (b) En déduire que la série de terme général a_n converge.
2. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.
   (b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$
   où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.
   (b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$

(b) Retrouver alors le résultat de la question 3) b.

Partie I : Étude de suite

1. (a) La limite en 0 ne pose aucun problème, c'est celle de ln, on a donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.}$$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée ; mais on met tout sous un même logarithme :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.}$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme somme et composée de fonctions usuelles dérivables. On a d'ailleurs

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x+(x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
f	||	$-\infty$ ↗	0

(c) Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } u_{n+1} - u_n = f(n).}$$

(d) D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(n) < 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ et

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est (strictement) décroissante.}}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).}$$

(b) On pose la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$. Cette fonction est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0$$

La fonction g est donc strictement décroissante et $g(0) = 0$ donc la fonction g est négative ou nulle. En conséquent

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \leq x.}$$

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n$, on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ ou encore que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$$

(c) On pose la fonction $h(x) = \ln(1+x) - x - \dfrac{x^2}{2}$. La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} - x = \frac{1 + x - 1 - x - x^2}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0$$

La fonction h est donc strictement décroissante et $h(0) = 0$. La fonction h est donc strictement négative. On en conclut que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}.}$$

(d) En remplaçant dans la dernière inégalité x par $\dfrac{1}{n}$, on a directement

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

La série de terme général $1/2n^2$ est convergente comme multiple d'une série de Riemann convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série de terme générale } v_{n+1} - v_n \text{ est donc convergente.}}$$

On note alors γ la valeur de sa somme

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n).$$

(e) Le calcul de la somme partielle de la série susnommée fait apparaitre une somme télescopique ;

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1$$

Or $v_1 = u_1 - 1$ et $u_1 = 1$ donc $v_1 = 0$ et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n.}$$

Ainsi, (v_n) est convergente et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \gamma.}$$

3. (a) Cette question n'étant pas vraiment formulée ; on interprète l'énoncé comme une demande de justification de la convergence de (u_n) et le calcul de sa limite. On voit que

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Comme (v_n) converge et que $1/n \to 0$, on en déduit que

$$\boxed{(u_n) \text{ converge et a la même limite que } (v_n), \text{ c'est à dire } \gamma.}$$

(b) (v_n) étant croissante et convergente vers γ, (u_n) étant décroissante et convergente vers γ, on a bien l'encadrement demandé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n.}$$

Ceci permet de voir que

$$0 \leq u_n - \gamma = v_n - \gamma + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui donne bien

$$\boxed{|u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.}$$

Partie II : Étude d'une série

1. (a) On a pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned} 2n - 1 \geq n &\iff \frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{n} \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{n(2n-1)} \leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Donc, on a bien

$$\boxed{a_n \leq \frac{1}{n^2}.}$$

(b) La série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ est un multiple d'une série de Riemann convergente. Par comparaison de deux séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série de terme général } a_n \text{ converge.}}$$

2. (a) Observons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et

$$\boxed{\text{on reconnait une décomposition des indices de sommation selon leur parité.}}$$

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} \quad &\iff \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha(2n-1) + \beta n}{n(2n-1)} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha + \beta & = & 0 \\ -\alpha & = & 1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } a_n = \frac{-1}{n} + \frac{2}{2n-1}.}$$

(c) On utilise les résultats des deux dernières questions

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} && \text{(d'après 2b.)} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) && \text{(d'après 2a.)} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.}$$

3. (a) On revient à la définition de u_n

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n + \ln(2) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \ln(2) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n) + \ln(2) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_{2n} - u_n + \ln(2) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.}$$

(b) D'après 2c. et 3a., on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \lim_{n \to +\infty} 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= 2 \times \lim_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_n + \ln(2)) \end{aligned}$$

or, comme (u_n) converge, u_{2n} et u_n ont même limite et leur différence tend vers 0. Donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2).}$$

4. (a) On voit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1 + \frac{k}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}. \end{aligned}$$

(b) On reconnait une série de Riemann, on a alors que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln(2),$$

et on retrouve bien la valeur précédente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= 2 \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= 2 \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve le résultat de la question précédente, à savoir,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2).}$$