Devoir Surveillé n° 4

Le 04/03/23 **Durée : 4 heures**

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice 1

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \qquad \text{et} \qquad f(0) = -1$$

ainsi que la fonction φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x).$$

On donne un tableau de valeurs de f :

$x =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x) \approx$	-0,4	0	0,6	1,6	3	4,7	6,9	9,5

1. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Dresser le tableau de variation de f', puis celui de f. On précisera $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variations de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
6. On souhaite étudier pour tout entier naturel k, les solutions de l'équation $f(x) = k$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera x_k.
   (b) Donner la valeur de x_0.
   (c) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
   (d) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1}, puis justifer que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.
7. (a) Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) On donne $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,73$ et $\varphi(2) = 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2};2\right]$.
   (c) En étudiant les variations de φ', montrer que $\forall x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$, $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{2}{9}$.

(d) Montrer que $\varphi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 1$. En déduire que x_1 est l'unique solution de $x = \varphi(x)$.

8. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

   (b) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$.

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$.

   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).

   (d) Comment choisir n pour que $|u_n - x_1| \leq 10^{-5}$?

Exercice 2

On considère deux urnes :

- une urne rouge, composée de deux balles rouges et deux balles bleues.
- une urne bleue, composée d'une balle rouge et de trois balles bleues.

Le but de l'exercice est d'étudier deux jeux de tirage dans ces urnes, avec ou sans remise. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'évènement "on tire une balle rouge au n-ième tirage", et B_n l'évènement : "on tire une balle bleue au n-ième tirage". Le premier tirage s'effectue toujours dans l'urne rouge ;puis le tirage numéro n s'effectuera dans l'urne de la couleur de la balle obtenue au tirage numéro $n-1$. On suppose qu'il y a équiprobabilité du choix des différentes balles.

Les parties A et B sont indépendantes entre elles.

Partie A

Dans cette partie, on effectue une succession de tirages avec remise, selon le protocole décrit au début de l'exercice. On notera égaelement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = P(R_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $P(R_n) \neq 0$ et que $P_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{2}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_{n+1} = \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}$.
3. En déduire le terme général de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis celui de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie B

Dans cette partie, on effectue trois tirages successifs sans remise selon le protocole décrit précédemment.

4. Justifier que $P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{3}$. Déterminer également $P_{B_1}(R_2)$.
5. Calculer $P(R_2)$.
6. Calculer $P_{R_2}(R_1)$.
7. Que dire de l'évènement $R_1 \cap R_2 \cap R_3$?
8. Pour $n \in [|0; 3|]$, on note A_n l'évènement "obtenir n boules rouges au cours de ces trois tirages".

   (a) Que vaut $P(A_3)$? Justifier.

   (b) Déterminer $P_{B1\cap B_2}(B_3)$. En déduire $P(A_0)$.

   (c) Calculer $P(A_1)$, puis $P(A_2)$.

   (d) Calculer $\sum_{k=0}^{3} kP(A_k)$.

Problème

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
   (a) Déterminer $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.
   (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = f(n)$.
   (d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
   (b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
   En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (c) Montrer que pour tout réel x positif,
   $$x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$$
   (d) En déduire que la série de terme général $(v_{n+1} - v_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
   On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
   (e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
   En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers γ.
3. (a) Déterminer $\lim_{n \to \infty} u_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{n}$

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

1. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq \frac{1}{n^2}$
   (b) En déduire que la série de terme général a_n converge.
2. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.
   (b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$
   où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

(b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

   (b) Retrouver alors le résultat de la question 3) b.