Correction du Devoir Surveillé n° 5

08/04/23

Exercice 1 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$, puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / \ AX = 2X\}$ est un espace vectoriel, dont on donnera une base et la dimension.
3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (a) Vérifier que $AV \in Vect(U, V)$.
   (b) Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (c) Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$, et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Calculer N^2, puis N^3.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \ AM = MA\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence
   $$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow NQ = QN$$
   (c) Démontrer que $\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\} = Vect(I_3, N, N^2)$.
   (d) Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.
6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \ M^2 + I_3 = A\}$.
   (a) L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?
   (b) Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence
   $$M \in \mathcal{R} \Leftrightarrow Q^2 = I_3 + N$$
   (c) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.
   (d) En déduire, à l'aide de la question 5.c, les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tells que $Q^2 = I_3 + N$.
   (e) Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

1. Un calcul donne $\boxed{(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A - 2I_3)^3 = 0_3 .}$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_2 \Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & +z & = & 2x \\ & 2y & +z & = & 2y \\ -x & -y & +3z & = & 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & -y & +z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ -x & -y & +z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \;/\; x \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$. Donc E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel, $\boxed{\text{de dimension 1, dont une base est } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).}$

3. (a) On trouve $\boxed{AV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V + U, \text{ donc } AV \in Vect(U, V)}$.

   (b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = 2X + V \Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & +z & = & 2x+1 \\ & 2y & +z & = & 2y \\ -x & -y & +3z & = & 2z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = & 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

   L'ensemble des solutions de l'équation $AX = 2X + V$ est

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -y-1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;/\; y \in \mathbb{R} \right\}}$$

   (c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche à montrer qu'il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $X = aU + bV + cW$

$$X = aU + bV + cW \Leftrightarrow \begin{cases} -a & +b & -c & = & x \\ a & & & = & y \\ & b & & = & z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = y \\ b = z \\ c = -x - y + z \end{cases}$$

   Le système étant de Cramer $\boxed{\text{la famille } (U, V, W) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

4. (a) Soit $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On résout $PX = B$.

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{cases} -a & +b & -c & = & x \\ a & & & = & y \\ & b & & = & z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = y \\ b = z \\ c = -x - y + z \end{cases}$$

   Le système étant de Cramer, la matrice P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

   (b) $\boxed{\text{On trouve } T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + N.}$

   (c) $\boxed{\text{On a simplement } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0_3.}$

(d) On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. (Classique à savoir faire).
Et comme I_3 et N commutent, la formule du binôme de Newton donne

$$T^n = (2I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k 2^{n-k}$$

Or pour tout $k \geq 3$, $N^k = 0_3$, donc

$$T^n = \binom{n}{0} 2^n N^0 + 2^{n-1}\binom{n}{1} N + 2^{n-2}\binom{n}{2} N^2 = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1)2^{n-3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^n & -n2^{n-1} + 2^n & -n(n-1)2^{n-3} + n2^{n-1} + 2^n \\ 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^n & 2^{n-1}(2-n) & 2^{n-3}(8 + 4n - n(n-1)) \\ 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^{n-3}(8 + 4n - n(n-1)) & -2^{n-3}(8 + 4n - n(n-1)) - 2^n & 2^{n-3}(8 + 4n - n(n-1)) + 2^{n-1}(2-n) \\ n(n-1)2^{n-3} & 2^n - n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-3} \\ -n2^{n-1} & n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. (a)
- Par définition, $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- $0_3 \in \mathcal{C}$ car $A0_3 = 0_3A = 0_3$.
- Soit $(M, N) \in \mathcal{C}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(\lambda M + N)A = \lambda MA + NA$$

Or $AM = MA$ et $AN = NA$, donc

$$(\lambda M + N)A = \lambda AM + AN = A(\lambda M + N)$$

Donc $\lambda M + N \in \mathcal{C}$.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{C} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \text{ et donc un espace vectoriel.}}$

(b) On a $M = PQP^{-1}$ et $A = PTP^{-1} = P(2I_3 + N)P^{-1} = 2I_3 + PNP^{-1}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow APQP^{-1} = PQP^{-1}A \Leftrightarrow (2I_3 + PNP^{-1})PQP^{-1} = PQP^{-1}(2I_3 + PNP^{-1}) \\
&\Leftrightarrow 2PQP^{-1} + PNP^{-1}PQP^{-1} = 2PQP^{-1} + PQP^{-1}PNP^{-1} \\
&\Leftrightarrow PNQP^{-1} = PQNP^{-1} \Leftrightarrow \boxed{NQ = QN}
\end{aligned}$$

(c) Soit $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ e & f & g \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
QN = NQ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} d = g = 0 \\ a = e \\ b = f \\ d = h \\ e = i \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi $\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \boxed{Vect(I_3, N, N^2)}$.

(d) D'après les questions précédentes il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Q = P^{-1}MP = aI_3 + bN + cN^2$, donc

$$M = P(aI_3 + bN + cN^2)P^{-1} = aI_3 + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1} = aI_3 + b(A - 2I_3) + c(A - 2I_3)^2$$

où

$$PNP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } PN^2P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{C}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $(I_3, A - 2I_3, (A - 2I_3)^2)$.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aI_3 + b(A - 2I_3) + c(A - 2I_3)^2 = 0$.

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Le coefficient de la deuxième ligne première colonne donne $z = 0$, la dernière ligne donne $y = 0$ puis vient $x = 0$. Donc la famille est libre.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{C} \text{ est un espace vectoriel de dimension 3, dont une base est } (I_3, A - 2I_3, (A - 2I_3)^2).}$

6. (a) On peut montrer que $\boxed{\mathcal{R} \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$, car la matrice nulle n'appartient pas à cet ensemble.

(b) Comme $Q^2 = P^{-1}M^2P$,

$$M \in \mathcal{R} \Leftrightarrow M^2 = A - I_3 \Leftrightarrow PQ^2P^{-1} = A - I_3 \Leftrightarrow Q^2 = P^{-1}(A - I_3)P \Leftrightarrow Q^2 = P^{-1}AP - I_3$$

Or $P^{-1}AP = T = 2I_3 + N$, donc

$$\boxed{M \in \mathcal{R} \Leftrightarrow Q^2 = I_3 + N}$$

(c) Si $Q^2 = I_3 + N$, c'est que $M \in \mathcal{R}$, et donc que $M^2 + I_3 = A$. On obtient donc que

$$AM = (M^2 + I_3)M = M^3 + M \text{ et } MA = M(M^2 + I_3) = M^3 + M$$

Ainsi $M \in \mathcal{C}$, et d'après la question 5b), $\boxed{Q \text{ et } N \text{ commutent.}}$

(d) D'après la question précédente, si $Q^2 = I_3 + N$, alors $QN = NQ$.D'après la question 5c, comme $QN = NQ$, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Q = aI_3 + bN + cN^2$. Donc, comme $N^k = 0_3$ pour $k \geq 3$

$$Q^2 = (aI_3 + bN + cN^2)(aI_3 + bN + cN^2) = a^2I_3 + abN + acN^2 + baN + b^2N^2 + caN^2 = a^2I_3 + 2abN + (b^2 + 2ac)N^2$$

Par identification des coefficients, on obtient

$$\begin{cases} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2 + 2ac & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \dfrac{1}{2a} \\ c = -\dfrac{b^2}{2a} = -\dfrac{\frac{1}{4a^2}}{2a} = -\dfrac{1}{8a} \end{cases}$$

Ainsi les matrices Q telles que $Q^2 = I_3 + N$ sont

$$\boxed{\left\{ I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 \ , \ -I_3 - \frac{1}{2}N + \frac{1}{8}N^2 \right\}}$$

(e) En reprenant la question précédente et la question 6b), on montre que les matrices M qui sont dans $\mathcal{R}$, sont de la forme

$$\left\{ P(I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2)P^{-1} \ , \ P(-I_3 - \frac{1}{2}N + \frac{1}{8}N^2)P^{-1} \right\}$$

et comme $PNP^{-1} = A - 2I_3$ et $PN^2P^{-1} = (A - 2I_3)^2$, on en déduit que les deux matrices M_1 et M_2 qui sont dans $\mathcal{R}$ sont

$$M_1 = -I_3 - \frac{A - 2I_3}{2} + \frac{(A - 2I_3)^2}{8} = -\frac{1}{2}A + \frac{A^2}{8} - \frac{4A}{8} + \frac{4I_3}{8} = \boxed{\frac{A^2}{8} + A - \frac{I_3}{2}}$$

et

$$\boxed{M_2 = -\frac{A^2}{8} - A + \frac{I_3}{2}}$$

Exercice n°2 :

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$. Justifier que f est définie sur $]1; +\infty[$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et donner sa dérivée.
   (b) Donner la tableau de variations complet. On précisera les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   (c) i. Soit $x \geq 2$. Donner, pour tout $t \in [x, x+1]$, un encadrement de $f'(t)$.
   ii. En déduire que pour tout $x \geq 2$, $f(x+1) - f(x) \leq \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
   (d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente.
2. Soit maintenant f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que f' soit positive et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que pour tout $x \geq 2$, $f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.
   (b) Déterminer alors une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} f'(k)$.
   (c) **Applications.** Etudier la nature des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(\ln(k)^\alpha)}$

1. (a) La fonction f est dérivable en tout point x tel que $\ln(x) > 0$, soit $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}_+^*.}$
   (b) Pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)} > 0$$

Limite en 1^+ :
$\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(\ln(x)) = -\infty$.

Limite en $+\infty$:

Par composition, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variation de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

   (c) i. Simple encadrement.
   ii. Soit $x \geq 2$. On sait que f est dérivable sur $[x, x+1]$, et que pour tout $t \in [x, x+1]$, $\dfrac{1}{x\ln(x)} \geq f'(t) \geq \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. L'inégalité des accroissement finis donne directement que

$$f(x+1) - f(x) \leq \frac{x+1-x}{x\ln(x)} \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) \leq \frac{1}{x\ln(x)}$$

   iii. Ainsi pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \sum_{k=2}^{n} f(k+1) - f(k)$$

et par télescopage, il vient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k\geq 2} \dfrac{1}{k\ln(k)} \text{ est divergente}}$.

2. (a) Soit $x \geq 2$. La fonction f est dérivable sur $[x, x+1$, et f' est décroissante, donc pour tout $t \in [x, x+1]$, $f'(x) > f'(t) > f'(x+1)$. L'inégalité des accroissements finis donne

$$f(x+1) - f(x) \leq f'(x).$$

En raisonnant de manière analogue sur $[x-1, x]$, on trouve

$$f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$$

donc

$$\boxed{f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)}$$

(b) Soit $n \geq 2$. De l'inégalité précédente découle

$$\sum_{k=2}^{n} f(k+1) - f(k) \leq \sum_{k=2}^{n} f'(k) \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(k-1)$$

et par télescopage, on en déduit que

$$f(n+1) - f(2) \leq \sum_{k=2}^{n} f'(k) \leq f(n) - f(1)$$

Il vient alors que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k\geq 2}^{n} f'(k) \text{ converge si et seulement si } (f(n))_{n\geq 1} \text{ converge.}}$

(c) Si $\alpha = 1$, on vient de voir que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k\geq 2} \dfrac{1}{k\ln(k)} \text{ est divergente}}$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\ln(x)$, définie dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $(\ln(n))_{n\geq 1}$ diverge, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k\geq 1}^{n} \dfrac{1}{k} \text{ diverge.}}$

Si $\alpha \neq 1$, on cherche des primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^\alpha}$. On trouve ,

$$F : x \mapsto \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \qquad \text{et} \qquad G : x \mapsto \frac{\ln(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Les fonctions F et G sont définies et dérivables sur $]1; +\infty[$, de dérivées décroissante et positive sur $]1; +\infty[$.
Or $\left(\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\dfrac{\ln(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)_{n\geq 1}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$, donc

$$\boxed{\text{les séries } \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(\ln(k)^\alpha)} \text{ convergent si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Problème :

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

B_k l'évènement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"

R_k l'évènement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction d'évènements R_k et B_k.

2. En déduire, en simplifiant la fraction obtenue, que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}([Y=n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

3. (a) Trouver deux réels a et b tels que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}([Y=n]) = \dfrac{a}{(n+1)} + \dfrac{b}{(n+2)}$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}([Y=n]) = 1$.

4. (a) Vérifier que pour tout $n \geq 4$, on a $\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} > \dfrac{1}{n}$. (*on pourra se servir de l'encadrement* $4 < \sqrt{17} < 5$) .

   (b) En déduire que Y n'admet pas d'espérance. Y admet-elle une variance ?

Partie II : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Donner la loi de X_1, puis calculer son espérance et sa variance.

7. (a) Calculer $\mathrm{P}(X_2 = 1)$ par la formule des probabilités totales. En déduire la loi de X_2.

   (b) Justifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [|0;n|]$. On **admet** le résultat suivant : $\quad \mathrm{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\quad E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

   (b) Donner la répartition de l'urne une fois que l'événement $[S_n = k]$ se réalise.

   (c) En déduire que : $\mathrm{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

   (d) A l'aide de la formule des probabilités totales , montrer que $\quad \mathrm{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{E(S_n)+2}{n+3}$.

   (e) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Partie III : Etude d'une convergence

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

9. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad \forall x < 0, \quad \mathrm{P}([T_n \leq x]) = 0, \quad$ et : $\quad \forall x > 1, \quad \mathrm{P}([T_n \leq x]) = 1$.

10. Soit $x \in [0;1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad \mathrm{P}([T_n \leqslant x]) = \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$ où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

11. En déduire, pour $x \in [0;1]$ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(T_n \leq x)$.

Partie I : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

3. cf question suivante pour les deux questions.

4. Tout d'abord , comme il y remise de boules dans l'urne, il est clair que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et en augmentant de 1 le nombre de boules rouges après chacun des $n-1$ premiers tirages :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}([Y=n]) &= \mathrm{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) \quad = \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5} \ldots \frac{2+(n-2)}{3+(n-2)} \frac{1}{3+(n-1)} \\ &= \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5} \ldots \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2} \quad = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

La simplification se fait par téléscopage dans le produit. Quelques justifications :

- Pour la deuxième égalité ,les évènements n'étant pas indépendants , on utilise la formule des probabilités composées .

- pour tout $k \in [|1; n-1|]$,on calcule $\mathrm{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap Rk-1}(R_k)$ en faisant le quotient du nombre de boules rouges dans l'urne $(2+(k-1))$ par le nombre total de boules dans l'urne $(3+(k-1))$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} = \frac{a(n+2)+b(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(a+b)+2a+b}{(n+1)(n+2)}$$

Deux polynômes étant égaux ssi ils ont même degré et mêmes coefficients,

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} \Leftrightarrow 2 = n(a+b)+2a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$$

(b) En utilisant le résultat précédent et, par téléscopage, on a, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}([Y=n]) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(n+1)} - \frac{2}{(n+2)} = \frac{2}{2} - \frac{2}{N+2} = 1 - \frac{2}{N+2}$ qui tend bien vers 1 lorsque $N \to +\infty$, ce qui justifie que la série converge vers 1.

6. (a) Comme tous les termes sont strictement positifs, cela revient (en multipliant de chaque côté par les deux dénominateurs) à démontrer que, pour tout $n \geq 4$, on a $2n^2 > (n+1)(n+2) \Leftrightarrow 2n^2 > n^2+3n+2 \Leftrightarrow n^2-3n-2>0$.

Or, $\Delta = 17$ et les racines de ce polynôme sont $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

D'après l'encadrement donné, la plus grand est comprise entre $\frac{3+4}{2} = 3,5$ et $\frac{3+5}{2} = 4$. Donc, comme n est plus grand que cette racine (car $n \geq 4$), le polynôme est du signe de a donc positif, ce qui démontre l'inégalité

(b) La série harmonique est divergente et, d'après l'inégalité précédente, cela implique que la série de terme général $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} = n\,\mathrm{P}([Y=n])$ est également divergente (comparaison des sommes partielles). Par conséquent, Y n'admet pas d'espérance, ce qui implique qu'elle n'admet pas non plus de variance.

Partie II : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

7. De façon classique, X_k étant le nombre de boules rouges tirées (0 ou 1) au k-ième tirage et S_n le nombre total de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

8. La variable aléatoire <u>X_1 suit une loi de Bernoulli</u> de paramètre $p = \mathrm{P}(X_1=1) = \mathrm{P}(R_1) = \frac{2}{3}$.

Son espérance est donc $E(X_1) = p = \frac{2}{3}$ et sa variance $V(X_1) = p(1-p) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

9. (a) On utilise le SCE associé à X_1 dans la formule des probabilités totales, ce qui donne :

$\mathrm{P}(X_2=1) = \mathrm{P}(X_1=0 \cap X_2=1) + \mathrm{P}(X_1=1 \cap X_2=1) = \mathrm{P}(B_1R_2) + \mathrm{P}(R_1R_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{4} + \frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ par la formule des probabilités totales.

Comme X_2 ne prend que les valeurs 0 et 1, on en déduit que X_2 suit aussi une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{3}$.

(b) Comme $\mathrm{P}(X_1=1)\,\mathrm{P}(X_2=1) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ et $\mathrm{P}(X_1=1 \cap X_2=1) = \frac{1}{2}$, on déduit que <u>les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.</u>

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [|0; n|]$. On **admet** le résultat suivant : $\mathrm{P}([S_n=k]) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

(a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,$S_n(\Omega) = [|0;n|]$,donc S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{P}([S_n=k])$.

Donc $E(S_n) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k \right)$.

Soit $E(S_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{(2n+1)}{3} + 1 \right)$

Finalement : $E(S_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{(2(n+2)}{3} \right) = \frac{2n}{3}$.

(b) L'événement $(S_n = k)$ se réalise lorsque sur n tirages , il apparaà®t k boules rouges et $n-k$ boules bleues, <u>dans un ordre indéterminé</u> .

La répartition de l'urne est alors $2+k$ boules rouges et $1+n-k$ boules bleues pour un total de $3+n$ boules.

(c) Par équiprobabilité, il est immédiat de déduire que $\mathrm{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1}=1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

(d) La formule des probabilités totales associée au système complet d'évènements $([S_n = k])_{k\in[|0;n|]}$ fournit :

$$\mathrm{P}([X_{n+1}=1]) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1}=1])\,\mathrm{P}([S_n=k])$$

$$\mathrm{P}([X_{n+1}=1]) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{n+3}\mathrm{P}([S_n=k]) = \frac{1}{n+3}\left(\sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{P}([S_n=k]) + 2\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}([S_n=k])\right)$$

$$\mathrm{P}([X_{n+1}=1]) = \frac{1}{n+3}(E(S_n)+2) = \frac{E(S_n)+2}{n+3}.$$

(e) X_{n+1} suit une loi de Bernoulli et, puisque $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$, son paramètre est :

$$\mathrm{P}([X_{n+1}=1]) = \frac{E(S_n)+2}{n+3} = \frac{\frac{2n}{3}+2}{n+3} = \frac{\frac{2n+6}{3}}{n+3} = \frac{2}{3}.$$

On remarque que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } X_n \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{2}{3}}$.

Partie III : Etude d'une convergence

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n(\Omega) = [|0;n|]$ donc $T_n(\Omega) = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\} \subset [0;1]$.
    Ainsi,
    $\forall x < 0, \quad P([T_n \leqslant x]) = 0, \quad$ et : $\quad \forall x > 1, \quad P([T_n \leqslant x]) = 1.$
12. Soit $x \in [0;1]$ et soit n de $\mathbb{N}^*$:
    $P([T_n \leqslant x]) = P([S_n \leqslant nx]) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor} P([S_n = k]) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor} \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$ d'après le résultat de la question 8. (b) de la partie III.
    Ainsi,
    $$P([T_n \leqslant x]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor}(k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{j=1}^{\lfloor nx\rfloor+1} j \text{ (changement d'indice } j = k+1)$$
    Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$ donc, avec $m = \lfloor nx\rfloor + 1$ on obtient :
    $$P([T_n \leqslant x]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\,\frac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{2}$$
    <u>Conclusion :</u> $\boxed{P([T_n \leqslant x]) = \dfrac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+1)(n+2)} \text{ si } x \in [0;1]}$
13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction de répartition de T_n est donnée par :
    $$P([T_n \leqslant x]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+1)(n+2)} & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}.$$
    Etudions la limite de $\dfrac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+1)(n+2)}$ lorsque n tend vers $+\infty$:
    $$\frac{(\lfloor nx\rfloor+1)(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(\lfloor nx\rfloor+1)}{(n+1)}.\frac{(\lfloor nx\rfloor+2)}{(n+2)}$$
    Or, $\dfrac{(\lfloor nx\rfloor+1)}{(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}$.
    Et pour tout $x \in [0;1]$, $\qquad nx - 1 \leqslant \lfloor nx\rfloor \leqslant nx \Rightarrow x - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n} \leqslant x$
    Ainsi d'après le théorème de l'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} = x$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\lfloor nx\rfloor+1)}{(n+1)} = x$.

De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+2)} = x$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} P\left([T_n \leqslant x]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$.