Devoir Surveillé n° 5

Le 08/04/23 **Durée : 4 heures**

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice n°1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$, puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / \ AX = 2X\}$ est un espace vectoriel, dont on donnera une base et la dimension.
3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (a) Vérifier que $AV \in Vect(U, V)$.
   (b) Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (c) Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$, et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Calculer N^2, puis N^3.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \ AM = MA\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow NQ = QN$$

   (c) Démontrer que $\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\} = Vect(I_3, N, N^2)$.
   (d) Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.

6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \ M^2 + I_3 = A\}$.
   (a) L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?
   (b) Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence
   $$M \in \mathcal{R} \Leftrightarrow Q^2 = I_3 + N$$
   (c) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.
   (d) En déduire, à l'aide de la question 5.c, les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tells que $Q^2 = I_3 + N$.
   (e) Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

Exercice n°2

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$. Justifier que f est définie sur $]1; +\infty[$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et donner sa dérivée.
   (b) Donner la tableau de variations complet. On précisera les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   (c) i. Soit $x \geq 2$. Donner, pour tout $t \in [x, x+1]$, un encadrement de $f'(t)$.
   ii. En déduire que pour tout $x \geq 2$, $f(x+1) - f(x) \leq \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
   (d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente
2. Soit maintenant f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que f' soit positive et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que pour tout $x \geq 2$, $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$.
   (b) Déterminer alors une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} f'(k)$.
   (c) **Applications.** Etudier la nature des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(\ln(k)^\alpha)}$

Problème

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

B_k l'évènement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
R_k l'évènement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction d'évènements R_k et B_k.
2. En déduire, en simplifiant la fraction obtenue, que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
3. (a) Trouver deux réels a et b tels que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}([Y = n]) = \dfrac{a}{(n+1)} + \dfrac{b}{(n+2)}$.

(b) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}([Y=n]) = 1$.

4. (a) Vérifier que pour tout $n \geq 4$, on a $\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} > \dfrac{1}{n}$. (*on pourra se servir de l'encadrement* $4 < \sqrt{17} < 5$) .

   (b) En déduire que Y n'admet pas d'espérance. Y admet-elle une variance ?

Partie II : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Donner la loi de X_1, puis calculer son espérance et sa variance.

7. (a) Calculer $\mathrm{P}(X_2 = 1)$ par la formule des probabilités totales. En déduire la loi de X_2.

   (b) Justifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [|0; n|]$. On **admet** le résultat suivant : $\mathrm{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

   (b) Donner la répartition de l'urne une fois que l'événement $[S_n = k]$ se réalise.

   (c) En déduire que : $\mathrm{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

   (d) A l'aide de la formule des probabilités totales , montrer que $\mathrm{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{E(S_n)+2}{n+3}$.

   (e) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Partie III : Etude d'une convergence

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

9. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x < 0$, $\mathrm{P}([T_n \leq x]) = 0$, et : $\forall x > 1$, $\mathrm{P}([T_n \leq x]) = 1$.

10. Soit $x \in [0;1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}([T_n \leqslant x]) = \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$ où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

11. En déduire, pour $x \in [0;1]$ $\lim\limits_{n \to +\infty} P(T_n \leq x)$.