Correction du Devoir Surveillé n° 6

08/04/23

Exercice 1 :

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de A.
On note P le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$P(X) = X^3 - X^2 - 2X$$

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $P(A) = 0$.
2. Montrer que la famille $\left(A, A^2\right)$ est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que : $A^n = a_n A + b_n A^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$
   (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   (c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
5. La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle libre ? Donner le rang de (C_1, C_2, C_3).
6. La matrice A est-elle inversible ?
7. On note $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.
   (a) Montrer que le polynôme P admet trois racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (b) Pour chacune de ces racines, montrer que E_{λ_i} est un espace vectoriel et en donner une base.
8. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$AM + MA = 0$$

1. Un simple calcul donne
$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$
Il vient alors
$$P(A) = A^3 - A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{= 0_2}$$
2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha A + \beta A^2 = 0_2$. Les coefficients sur la diagonales donnent alors
$$\begin{cases} \alpha & +3\beta & = & 0 \\ \alpha & +\beta & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta & = & 0 \\ \alpha & = & -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta & = & 0 \\ \alpha & = & -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \end{cases}$$
$\boxed{\text{La famille } (A, A^2) \text{ est donc libre.}}$
3. On raisonne par récurrence.
Initialisation :
Pour $n = 1$, en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, on trouve bien $\boxed{A = a_1 A + b_1 A^2.}$

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que : $A^n = a_n A + b_n A^2$. Montrons qu'il existe un couple unique (a_{n+1}, b_{n+1}) de nombres réels tel que : $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}A^2$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = (a_n A + b_n A^2)A \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= a_n A^2 + b_n A^3 \\ &= a_n A^2 + b_n(A^2 + 2A) \qquad \text{d'après la question 1} \\ &= 2b_n A + (a_n + b_n)A^2 \end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, on obtient bien

$$\boxed{A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}A^2}$$

Conclusion :
Pour tout entier naturel n non nul, il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que : $A^n = a_n A + b_n A^2$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les relations trouvées dans l'hérédité de la question précédente, on trouve :

$$a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2(a_n + b_n) = 2a_n + 2b_n \boxed{= 2a_n + a_{n+1}}$$

(b) La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout son équation caractéristique :

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2$$

On en déduit qu'il existe deux réel λ et μ tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$. Les valeurs initiales de la suite donnent

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu &= a_1 &= 1 \\ \lambda + 4\mu &= a_2 &= 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\lambda & +2\mu &= 1 \\ & 6\mu &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{4}{6} \\ \mu = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{4(-1)^{n+1} + 2^n}{6}}$$

Et pour tout $n \geq 1$, $\boxed{b_n = \dfrac{a_{n+1}}{2} = \dfrac{4(-1)^{n+2} + 2^{n+1}}{12} = \dfrac{2(-1)^{n+1} + 2^n}{6}}$

(c) En combinant les résultats des deux questions précédentes, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \boxed{A^n = \frac{4(-1)^{n+1} + 2^n}{6}A + \frac{2(-1)^{n+1} + 2^n}{6}I}$$

(d) On remarque rapidement que $C_2 = C_3$ puis que C_1 et C_2 sont, étant donnée la postion des 0, linéairement indépendants.
$\boxed{\text{Donc la famille } (C_1, C_2, C_3) \text{ n'est pas libre, et est de rang 2.}}$

(e) Comme les deux dernières lignes de A sont identiques, $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$

(f) i. On factorise P : $P(X) = X^3 - X^2 - 2X = X(X^2 - X - 2) = X(X+1)(X-2)$. Ainsi le polynôme P admet trois racines

$$\boxed{\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = 2}$$

(g) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Si $\lambda = -1$.

$$X \in E_{-1} \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +z &= -x \\ x & & &= -y \\ x & & &= -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= -y - z \\ y &= z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -z \\ y &= z \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{E_{-1} = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$$\boxed{\text{Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ de dimension 1, de base } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

Si $\lambda = 0$.

$$X \in E_{-1} \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ x & & & = & 0 \\ x & & & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = & -z \\ x & = & 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{E_0 = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$$\boxed{\text{Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ de dimension 1, de base } \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

Si $\lambda = 2$.

$$X \in E_{-1} \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & 2x \\ x & & & = & 2y \\ x & & & = & 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & = & -y-z \\ y & = & z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 2z \\ y & = & z \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$$\boxed{\text{Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ de dimension 1, de base } \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a & a \\ d+e+f & d & d \\ g+h+i & g & g \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{cases} c & = & g \\ c & = & d \\ g & = & b \\ b & = & d \\ a & = & d+e+f \\ a & = & g+h+i \\ a & = & b+e+h \\ a & = & c+f+i \\ a+d+g & = & a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & = & c & = & d & = & g \\ a & = & b+e+f \\ e+f & = & h+i & = & e+h & = & f+i \\ d+g & = & b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = d = g \\ f = h \\ e = i \\ a = g+h+i \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM + MA = 0$$

est

$$\left\{ \begin{pmatrix} g+h+i & g & g \\ g & i & h \\ g & h & i \end{pmatrix} ; | \ (g,h,i) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \boxed{Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   (b) Calculer $P(T_n = 1)$.
   (c) Montrer que : $P(T_n = n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   (b) En utilisation un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel $i \geq k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

   (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\forall i \in [\![k, n]\!],\ P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$$

   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.
8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
10. Calculer $\lim_{n \to +\infty} E(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variable $(T_n)_{n \geq 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = k) = \frac{k-1}{k!}$.
    (a) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.
    (b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$

Partie A

1. Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, la variable X_k suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Et donc : $\mathrm{E}(X_k) = \frac{n+1}{2}$.
2. (a) Si la première boule tirée est la boule numéro n, on a $T_n = 1$.
   Comme $S_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{X_i}_{\geq 1} \geq n$, la variable T_n ne peut pas prendre de valeur strictement supérieure à n.
   Enfin, toute valeur intermédiaire est possible : si $k \in [\![2, n]\!]$, alors la suite de tirages

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{(k-1) \text{ premiers tirages}}, \overbrace{(n-k+1)}^{k\text{-ème tirage}} \quad \text{(par exemple)}$$

   donne $T_n = k$ (puisque $S_{k-1} = k - 1 < n$ et $S_k = n$).
   (b) La seule possibilité pour avoir $S_1 \geq n$ est de tirer la boule numéro n au premier tirage (et on aura alors en fait $S_1 = n$) :

$$(T_n = 1) = (X_1 = n).$$

   Puisque X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{P}(T_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

   (c) L'événement $(T_n = n)$ est égal à :

$$\begin{aligned}
(S_{n-1} \leq n-1) \cap (S_n \geq n) &= \underbrace{(\overbrace{\overbrace{X_1}^{\geq 1} + \cdots + \overbrace{X_{n-1}}^{\geq 1}}^{\geq n-1} \leq n-1)}_{\text{donc égalité partout}} \cap (S_n \geq n) \\
&= (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (S_n \geq n) \\
&= (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_1 + \cdots + X_n \geq n) \\
&= (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 1) \cap \underbrace{(X_n \geq 1)}_{\text{toujours vrai}} \\
&= (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 1)
\end{aligned}$$

   Par indépendance de $X_1, \ldots, X_{n-1}$ (les tirages sont avec remise) :

$$\mathrm{P}(T_n = n) = \frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. D'après la question 2 :

$$T_2(\Omega) = \{1,2\} \quad ; \quad \mathrm{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathrm{P}(T_2 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. D'après la question 2 :

$$T_3(\Omega) = \{1,2,3\} \quad ; \quad \mathrm{P}(T_3 = 1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mathrm{P}(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{9}.$$

Et par conséquent :

$$\mathrm{P}(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Calculons l'espérance de T_3 :

$$\mathrm{E}(T_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9}.$$

Partie B

5. Comme déjà précisé en partie A pour S_n et S_{n-1}, la variable S_k vaut au minimum k et ceci se produit lorsque les k premiers tirages ont donné la boule numéro 1.
Elle vaut au maximum $n \times k$, situation qui se produit lorsque l'on tire k fois la boule numéro n.
Ceci prouve l'inclusion :

$$S_k(\Omega) \subset [\![k, nk]\!].$$

On peut supposer que le correcteur se contentera de cette réponse, l'égalité étant un peu difficile à prouver. On peut par exemple procéder par récurrence sur $k \geq 1$ pour prouver l'inclusion réciproque : $\forall k \geq 1,\ [\![k, nk]\!] \subset S_k(\Omega)$.

- *Initialisation : Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, si le premier tirage donne la boule numéro i, alors $S_1 = X_1 = i$; donc : $[\![1, n]\!] \subset S_1(\Omega)$.*
- *Hérédité : Supposons pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ fixé que $[\![k, nk]\!] \subset S_k(\Omega)$ et prouvons que $[\![k+1, n(k+1)]\!] \subset S_{k+1}(\Omega)$. Soit $i \in [\![k+1, n(k+1)]\!]$:*
  - *Si $i \leq kn$, alors $i - 1 \in [\![k, nk]\!]$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une suite de k tirages $x_1, \ldots, x_k$ telle que $S_k = x_1 + \cdots + x_k = i - 1$.*
    La suite de $(k+1)$ tirages $x_1, \ldots, x_k, 1$ donne $S_{k+1} = i$.
  - *Si $i \geq kn + 1$, alors, par hypothèse de récurrence, il existe une suite de k tirages $x_1, \ldots, x_k$ telle que $S_k = x_1 + \cdots + x_k = kn$.*
    La suite de $(k+1)$ tirages $x_1, \ldots, x_k, i - kn$ (on a bien $1 \leq i - kn \leq n$ car $kn + 1 \leq i \leq kn + n$) donne $S_{k+1} = x_1 + \cdots + x_k + i - kn = nk + i - kn = i$.

6. (a) On a immédiatement :

$$S_{k+1} = X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

(b) Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{(S_k = j)\}_{j \in [\![k, nk]\!]}$ donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{nk} \mathrm{P}\left((S_{k+1} = i) \cap (S_k = j)\right) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} \mathrm{P}\left((S_k + X_{k+1} = i) \cap (S_k = j)\right) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} \mathrm{P}\left((X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j)\right) \end{aligned}$$

L'événement $(X_{k+1} = i - j)$ étant impossible si $i - j \notin [\![1, n]\!]$, on peut ne conserver dans cette somme que les termes tels que $1 \leq i - j \leq n$, c'est-à-dire (la deuxième des inégalités précédentes étant réalisée car $i \leq n$) tels que $j \leq i - 1$, les autres termes étant nuls. Puisque $i - 1 \leq nk$ (car $i \leq n$ et $k \geq 1$), on a :

$$\mathrm{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathrm{P}\left((X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j)\right)$$

Enfin, les variables $X_1, \ldots, Xk, X_{k+1}$ étant indépendantes, le lemme des colations donne l'indépendance des deux variables $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ et X_{k+1}.
D'où avec la question 1. (X_{k+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$) :

$$\mathrm{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \underbrace{\mathrm{P}(X_{k+1} = i - j)}_{= \frac{1}{n}} \times \mathrm{P}(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathrm{P}(S_k = j)$$

7. (a) La formule du triangle de Pascal s'écrit, pour $k, j \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouvons par récurrence sur i que :

$$\forall i \geq k+1,\ \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- Initialisation : pour $i = k+1$, la somme ne comporte qu'un seul terme : $\binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$.
- Hérédité : Supposons, pour un entier $i \geq k+1$ fixé que $\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$ et prouvons la formule pour $i+1$:

$$\sum_{j=k}^{(i+1)-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} = \dots$$

Par hypothèse de récurrence et avec la formule de Pascal :

$$\dots = \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} = \binom{i}{k} = \binom{(i+1)-1}{k}.$$

La formule est ainsi prouvée pour $i+1$.

(c)
- Initialisation : $\mathcal{H}_1$ s'écrit

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{P}(S_1 = i) = \frac{1}{n} \underbrace{\binom{i-1}{0}}_{=1} = \frac{1}{n}.$$

Comme $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ d'après la question 1., ceci est vrai.
- Hérédité : Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$ fixé.
Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$. D'après 6.(b) et par hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathrm{P}(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1}$$

Et donc, d'après la question 7.(b) :

$$\mathrm{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k} = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{(k+1)-1}.$$

On a ainsi prouvé $\mathcal{H}_{k+1}$.

8. (a) L'événement $(T_n > k)$ signifie que la somme des numéros des boules obtenues est pour la première fois supérieure ou égale à n lors du tirage numéro ℓ avec $\ell > k$, autrement dit que lors du tirage numéro k, la somme des numéros des boules obtenues est *strictement* inférieure (négation de « supérieure ou égale ») à n, c'est-à-dire $(S_k < n) = (S_k \leq n-1)$:

$$(T_n > k) = (S_k \leq n-1).$$

(b) En écrivant, avec une union d'événements incompatibles :

$$(T_n > k) = (S_k \leq n-1) = \bigcup_{i=1}^{n-1} (S_k = i)$$

on obtient, avec 7.(c) puis 7.(b) :

$$\mathrm{P}(T_n > k) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{P}(S_k = i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

9. La variable aléatoire T_n ($T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$) étant finie, elle admet en effet une espérance et :

$$\mathrm{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{P}(T_n = k).$$

En écrivant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{P}(T_n = k) = \mathrm{P}(T_n > k-1) - \mathrm{P}(T_n > k)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\big(\mathrm{P}(T_n > k-1) - \mathrm{P}(T_n > k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{P}(T_n > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1+1)\ \mathrm{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{P}(T_n > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(k-1)}_{\substack{=0 \\ \text{pour } k=1}}\ \mathrm{P}(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{P}(T_n > k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} (k-1)\ \mathrm{P}(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{P}(T_n > k)
\end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $\ell = k-1$ dans les deux premières sommes :

$$\mathrm{E}(T_n) = \cancel{\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathrm{P}(T_n > \ell)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathrm{P}(T_n > \ell) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} k\ \mathrm{P}(T_n > k)} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathrm{P}(T_n > \ell).$$

Avec la question 8.(b), on a donc :

$$\mathrm{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \times 1^{(n-1)-k} = \left(\frac{1}{n}+1\right)^{n-1}}_{\text{par la formule du binôme de Newton}}$$

10. On va déterminer la limite de $\mathrm{E}(T_n)$ en écrivant l'expression trouvée ci-dessus sous « forme exponentielle » :

$$\mathrm{E}(T_n) = \exp\left((n-1)\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)$$

Avec l'équivalent classique $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ lorsque u est une suite qui converge vers 0 (ici $u_n = 1/n \underset{0}{\longrightarrow}$) :

$$(n-1)\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) \sim_{n\to+\infty} (n-1)\times\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \to_{n\to+\infty} 1.$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$\mathrm{E}(T_n) \to_{n\to+\infty} \exp(1) = \mathrm{e}.$$

Partie C

11. (a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}$$

Décalons les indices dans la première somme de sorte à pouvoir simplifier :

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{N!} = 1 - \frac{1}{N!} \to_{N\to+\infty} 1.$$

On en déduit que la série $\sum_{k\geq 1} \mathrm{P}(Y=k)$ converge et que sa somme vaut 1.

(b) La question consiste ici à prouver la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} k\ \mathrm{P}(Y=k)$ et à en calculer la somme. Pour $N \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{N} k\ \mathrm{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{k\ \frac{k-1}{k!}}_{=0 \text{ pour } k=1} = \sum_{k=2}^{N} k\ \frac{k-1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!}}_{\text{changement d'indice}} \to_{N\to+\infty} \mathrm{e}$$

(on a reconnu la somme partielle de la série exponentielle $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ avec $x = 1$).

Par conséquent, T_n admet une espérance et $\mathrm{E}(T_n) = \mathrm{e}$.

12. Soit $k \in \mathbb{N}$. Reprenons l'expression obtenue en 8.(b) valable pour $n \geq k+1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_n > k) &= \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k} \times \frac{(n-1)!}{k!\ (n-1-k)!} \\
&= \frac{\overbrace{\overbrace{(n-1)}^{\sim n}\overbrace{(n-2)}^{\sim n}\dots\overbrace{(n-k)}^{\sim n}}^{\sim_{n\to+\infty} n^k}\cancel{(n-1-k)!}}{n^k\ k!\ \cancel{(n-1-k)!}} \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{n^k\ k!} = \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Cet équivalent étant indépendant de n, il s'agit de la limite :

$$\mathrm{P}(T_n > k) \to_{n\to+\infty} \frac{1}{k!}.$$