

DS n°6 - EPREUVE N°1

Concepteur : Ecricome - EML

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n°1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de A .

On note P le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$P(X) = X^3 - X^2 - 2X$$

1. Calculer A^2 et A^3 , puis vérifier que $P(A) = 0$.
2. Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que : $A^n = a_n A + b_n A^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
4. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

(b) En déduire a_n et b_n en fonction de n , pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

(c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n , pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

5. La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle libre? Donner le rang de (C_1, C_2, C_3) .

6. La matrice A est-elle inversible?

7. On note $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

(a) Montrer que le polynôme P admet trois racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

(b) Pour chacune de ces racines, montrer que E_{λ_i} est un espace vectoriel et en donner une base.

8. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM + MA = 0$$

Exercice n°2

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5, 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
(b) Calculer $P(T_n = 1)$.
(c) Montrer que : $P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3 . Vérifier que $E(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
(a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1} .
(b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
(b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel $i \geq k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

(c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note \mathcal{H}_k la proposition :

$$\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{H}_k est vraie.

8. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements: $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.

(b) En déduire que: $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

10. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variable $(T_n)_{n \geq 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que: $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y = k) = \frac{k-1}{k!}$.

(a) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.

(b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$

13. Démontrer alors que $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y .

Exercice n°3

On considère la fonction φ définie sur $] -\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in] -\infty, 1], \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude d'une fonction

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $] -\infty, 1]$.

2. (a) Justifier que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$ et montrer que pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $\varphi'(x) = -\ln(1-x)$.

(b) En déduire les variations de φ sur $] -\infty, 1]$.

(c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.
4. Etudier la convexité de φ sur $] -\infty; 1[$.
5. Donner l'équation de la tangente en 0 puis tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.
6. (a) Soit $a \in]0; 1[$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I_a = \int_a^1 t \ln(t) dt$.
- (b) En déduire : $F_a = \int_0^{1-a} \varphi(x) dx$ et montrer que $\lim_{a \rightarrow 0} F_a = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

7. (a) Vérifier, pour tout n de \mathbb{N}^* et tout t de $[0, x]$: $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.
- (b) En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^* : $-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
8. Montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* : $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.
- En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
9. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
10. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
- (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.
11. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.