Exercice n° 2 :

Partie I : Etude des fonctions hn

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1)- $x \longmapsto \ln(1+x)$ dérivable sur $]-1;+\infty[$

$x \longmapsto \frac{x}{1+x}$ comme fraction rationnelle, de dénominateur non nul.

Par somme, h_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

$$\forall x > -1, \quad h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1\times(1+x) - x\times 1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

Donc $\forall x > -1$, $h_n'(x) > 0$ et donc h_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

2)- $h_n(0) = n\ln(1) + \frac{0}{1} = 0$

Donc h_n est négative sur $]-1;0]$ et positive sur $\mathbb{R}^+$ car h_n croissante

3)- Ici $n = 1$

ⓐ $x \longmapsto \ln(1+x)$ dérivable sur $]-1;+\infty[$

$x \longmapsto x$

Par produit, f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$

ⓑ $\forall x > -1$ $\quad f_1'(x) = 1\times\ln(1+x) + x\times\frac{1}{1+x} = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$

$= h_1(x)$.

ⓒ- On a vu à la question 2 que $\begin{cases} \forall x \geq 0 & h_1(x) \geq 0 \\ \forall x \in]-1;0], & h_1(x) \leq 0 \end{cases}$

Donc f_1 est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4)- Ici $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

ⓐ- $x \longmapsto \ln(1+x)$ dérivable sur $]-1;+\infty[$

$x \longmapsto x^n$ ______

Par produit, f_n dérivable sur $]-1;+\infty[$.

ⓑ $\forall x > -1$

$$f_n'(x) = n x^{n-1} \times \ln(1+x) + x^n \times \frac{1}{1+x}$$

$$= x^{n-1}\left[n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right]$$

$$= x^{n-1} \, h_n(x)$$

ⓒ

Cas n impair

Si n impair, alors $n-1$ pair et $\forall x > -1, x^{n-1} \geq 0$

Donc $f_n'(x)$ est du signe de $h_n(x)$

Donc f_n est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$

Cas n pair.

Si n pair, alors $n-1$ est impair

On a alors le tableau de signes suivant :

	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	

Ainsi f_n est croissante sur $]-1;+\infty[$

Partie II : Etude d'une suite.

1) (a) Soit $x \in [0;1]$

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+c+b}{x+1}$$

Deux polynômes sont égaux ssi ils ont même degré et mêmes coefficients. Par identification

$$\frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1} \iff \begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \\ c+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in [0;1] \quad ax+b+\frac{c}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}}$.

(b) $J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2)$$

$$= \boxed{\ln(2) - \frac{1}{2}}.$$

(c) On pose $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(1+x) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont C^1 sur $[0;1]$ et donc par intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx.$$

On vient de voir que $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \ln(2) - \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{I_1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}}.$$

2) (a) - Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(1+x)\, dx - \int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,(x-1)\, dx$$

Or $\forall x \in [0;1]$, $x^n \geq 0$, $\ln(x+1) \geq 0$ et $x-1 \leq 0$

Donc l'intégrande est négative, et par croissance de l'intégrale

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

La suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \, [0;1]$ $x^n \geq 0$ et $\ln(1+x) \geq 0$ donc $x^n \ln(1+x) \geq 0$

Par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$.

La suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est positive, et donc minorée par 0. Comme elle est décroissante, le théorème de la limite monotone nous assure que $(I_n)_{n\geq 1}$ converge.

(c) - Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in [0;1]$ on a $1 \leq 1+x \leq 2$

$\Leftrightarrow$ $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$ car ln croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\Leftrightarrow$ $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2$ car $x^n \geq 0$

Par croissance de l'intégrale, on obtient alors

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2 \, dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}}$$

(d) - $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$. D'après le théorème des gendarmes,

on a $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

3) - Soit $x \in [0;1]$, $n \geq 2$.

(a) - S_n représente une somme de termes d'une suite géométrique de raison $(-x)$.

On a donc $S_n = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1-(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$

$= \frac{1+(-1)^{n+2} x^{n+1}}{1+x} = \boxed{\frac{1+(-1)^{n} x^{n+1}}{1+x}}$

(b) - Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x)^k \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-x)^k \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, dx$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \left[-\frac{(-x)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, dx$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{-(-1)^{k+1}}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, dx}.$$

(c) - On pose $\begin{cases} u'(x) = x^n \\ v(x) = \ln(x+1) \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont C^1 sur $[0;1]$ et par intégration par parties : $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+x} \, dx$

Donc $\boxed{I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}\,dx}$.

ⓓ- D'après la question ⓑ,

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{(-1)^n}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right)$$

$$= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right)$$

En remplaçant dans l'expression trouvée à la question ⓒ, on obtient:

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right]} .$$

ⓔ-
```
n = input('Donner un entier supérieur à 2')
S = 0
for k = 0 : n
    S = S + ((-1)^k / (k+1));
end
disp(S, 'la somme est égale à')
I = (log(2) / (n+1)) + ((-1)^n / (n+1)) * (log(2) - S);
disp(I, 'l'integrale vaut')
```