Correction du SIGMA n°1

10/05/23

Exercice 1 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas inversible.

2. Déterminer les deux réels λ tels que $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
3. Pour chacun de ces réels, montrer que $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.

   Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = AM$$

4. (a) Justifier que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$. Montrer que $f(\alpha M + N) = \alpha f(M) + f(N)$.
5. (a) Montrer que $K = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = 0_2\}$ est un espace vectoriel. En donner une base et sa dimension.
   (b) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1,E_2,E_3 et E_4 , puis justifier que $(E_1 + 3E_3, E_2 + 3E_4)$ est une base de $\mathrm{Im}(f) = \{f(M) \mid M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$.

6. Déterminer l'image par f des vecteurs de base de $\mathrm{Im}(f)$.
7. Généralisation : f est est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X$. Justifier que $X\ {}^tX$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que $f(X\ {}^tX) = \lambda X\ {}^tX$.
   (b) Soit λ un réel et M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $f(M) = \lambda M$. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que $AC_1 = \lambda C_1$ et $AC_2 = \lambda C_2$.

1. On vérifie simplement que $1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$, ce qui nous assure que $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible si et seulement si

$$(1-\lambda)(6-\lambda) - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0 \text{ et } \lambda \neq 7$$

   $\boxed{\text{La matrice } A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible pour } \lambda \in \{0, 7\}}$.

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On distingue les deux cas :

   - Si $\lambda = 0$.

$$X \in E_0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & = & 0 \\ 3x & +6y & = & 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$$

   Ainsi

$$\boxed{E_0 = Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$$\boxed{\text{Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ de dimension 1, de base } \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

- Si $\lambda = 7$.

$$X \in E_7 \Leftrightarrow AX = 7X \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & = & 7x \\ 3x & +6y & = & 7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x & +2y & = & 0 \\ 3x & -y & = & 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 3x - y = 0 \Leftrightarrow y = 3x$$

Ainsi

$$\boxed{E_7 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}$$

$\boxed{\text{Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ de dimension 1, de base } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).}$

4. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le produit de deux matrices carrées d'ordre n donne une matrice carrée d'ordre n, donc $\boxed{AM \in M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

   (b)
$$f(\alpha M + N) = A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = \boxed{\alpha f(M) + f(N)}$$

5. (a)
   - Par définition, $K \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - On a bien $0_2 \in K$, car $f(0_2) = A0_2 = 0_2$.
   - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(M, N) \in K^2$. Alors $f(\alpha M + N) = \alpha f(M) + f(N) = \alpha 0_2 + 0_2$.

   $\boxed{\text{Donc } K \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{, donc un espace vectoriel.}}$

   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$M \in K \Leftrightarrow AM = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c & = & 0 \\ b + 2d & = & 0 \\ 3a + 6c & = & 0 \\ 3a + 6d & = & 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & +2c & = & 0 \\ b + 2d & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$$

   Ainsi

$$\boxed{K = Vect\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de K, et elle est libre étant donnés l'emplacement des zéros. $\boxed{\text{Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ de dimension 2, de base } \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).}$

   (b) De simples calculs donnent

$$f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad f(E_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   Soit $N \in Im(f)$. Il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel $f(M) = N$. Comme (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors pour , il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

   ainsi par linéarité.

$$f(N) = af(E_1) + bf(E_2) + cf(E_3) + df(E_4)$$

   Or d'après ce qu'on vient de voir $f(E_3) = 2f(E_1) = 2(E_1 + 3E_3)$ et $f(E_4) = 2f(E_2) = 2(E_2 + 3E_4)$.

$$f(N) = (a + 2c)(E_1 + 3E_3) + (b + 2d)(E_2 + 3E_4)$$

   On montre ainsi (inclusion inverse évidente), que

$$Im(f) = Vect(E_1 + 3E_3, E_2 + 3E_4)$$

   Comme ces vecteurs sont linéairement indépendants, $(E_1 + 3E_3, E_2 + 3E_4)$ est une base de $Im(f)$.

6. Un simple calcul donne
$$\boxed{f(E_1+3E_3) = f(E_1)+3f(E_3) = 7(E_1+3E_3)}$$
$$\boxed{f(E_2+3E_4) = f(E_2)+3f(E_4) = 7(E_2+3E_4)}$$

7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X$. Comme ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, le produit d'une matrice de taille 2×1 par une de taille 1×2 donne une matrice de taille 2×2. Donc $\boxed{X\ {}^tX \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Par ailleurs
$$f(X\ {}^tX) = AX\ {}^tX = (AX)\ {}^tX = \boxed{\lambda X\ {}^tX}$$

8. Soit λ un réel et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $f(M) = \lambda M$. On note C_1 et C_2 les colonnes de M, autrement dit $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Comme $f(M) = \lambda M$, $AM = \lambda M$ ou encore
$$\begin{cases} a+2c = \lambda a \\ b+2d = \lambda b \\ 3a+6c = \lambda c \\ 3b+6d = \lambda d \end{cases}$$
On trouve alors
$$AC_1 = \begin{pmatrix} a+2c \\ 3a+6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \boxed{\lambda C_1}$$
$$AC_2 = \begin{pmatrix} b+2d \\ 3b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b \\ \lambda d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \boxed{\lambda C_2}$$

Exercice 2 :

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'originie est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point 0. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse $0, 1, ..., n$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. (a) Déterminer, pour entier naturel n non nul, la loi de X_n.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du modèle et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'évènement $[Y = n]$ à l'aide des des évènements $[X_i = 0]$, et leurs complémentaires.
   (b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   (c) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.
   (d) La variable Y admet-elle une espérance ?
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
   (b) En déduire que, pour tout $j \geq 2$, $\ln(j) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$.
   (c) Donner la limite de $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)}$ quand j tend vers $+\infty$.
4. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Déterminer pour $i \geq j$, la probabilité $P_{[Y=i]}(Z = j)$.

(b) Établir que $\forall i \leq j-1,\ P_{[Y=i]}(Z=j) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.

(c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z=j)$ comme une somme finie.

(d) La variable Z possède-t-elle une espérance ?

1. (a) Comme d'après l'énoncé, à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), le mobile se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse $0, 1, ..., n$, on a

$$\boxed{X_n(\Omega) = \{0,1,...,n\} \qquad \forall k \in \{0,1,...,n\},\ P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{\text{Comme } X_n \text{ est à support fini, elle admet une espérance et une variance.}}$

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n}{2}}$$

On calcule le moment d'ordre 2 en utilisant le théorème de transfert :

$$E(X_n^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \boxed{\frac{n(2n+1)}{6}}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{2n^2+n}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2+2n}{12} = \boxed{\frac{n(n+2)}{12}}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $[Y=n]$ se réalise lorsqu'à l'issue des $n-1$ premiers déplacements, le mobile ne se situe pas à l'origine, et qu'il s'y trouve à l'issue du n-ième. Donc

$$\boxed{[Y=n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{[X_k = 0]}\right) \cap [X_n = 0]}$$

(b) Les variables X_n étant mutuellement indépendantes, on trouve

$$P(Y=n) = \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{X_k = 0}) \times P(X_n = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \boxed{\frac{1}{n(n+1)}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\boxed{\text{on en déduit que } \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k) = 1.}$

(d) Comme Y est à support infini, elle admet une espérance si la série de terme général $(|kP(Y=k)|)_{k\geq 1}$ converge . Or pour tout entier k non nul

$$kP(Y=k) = \frac{1}{k+1}$$

On reconnait alors, à un changement d'indice près, le terme général d'une série de Riemann divergente. Donc $\boxed{Y \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t \in [x, x+1]$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln'(t) \leq \dfrac{1}{x}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\frac{1}{x+1} \leq ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

Puis on pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x = k$. Il vient alors

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$$

(b) Soit $j \geq 2$. En sommant terme à terme l'inégalité précédente, on trouve

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{j-1} ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=j-1}^{n} \frac{1}{k}$$

Et un télescopage donne

$$\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{j} \leq \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{j} - 1 + \frac{1}{j} \leq \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$$

D'où finalement

$$\boxed{\ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}}$$

(c) Cela donne également,

$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(j)} - \frac{1}{j\ln(j)}$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on trouve par encadrement que

$$\boxed{\lim_{j \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)} = 1}$$

4. (a) Soit $i \geq j$. Si l'évènement $[Y = i]$ s'est réalisé, c'est que le mobile revient pour la première fois à l'origine à l'instant i. Il n'est donc pas possible que son deuxième retour se fasse avant l'instant i, donc $\boxed{P_{[Y=i]}(Z = j) = 0}$.

(b) Soit $i \leq j - 1$. On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle

$$P_{[Y=i]}(Z = j) = \frac{P([Y = i] \cap [Z = j])}{P(Y = i)}$$

Or

$$P([Y = i] \cap [Z = j]) = P\left[\left(\bigcap_{k=1}^{i-1} \overline{[X_k = 0]}\right) \cap [X_i = 0] \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} \overline{[X_k = 0]}\right) \cap [X_j = 0]\right]$$

Alors par indépendance, on trouve

$$P([Y = i] \cap [Z = j]) = \frac{(i-1)!}{(i+1)!} \times \frac{i+1}{i+2} \times \frac{i+2}{i+3} \cdots \times \frac{j-1}{j} \frac{1}{j+1} = \frac{(j-1)!}{i(j+1)!}$$

Ainsi

$$P_{[Y=i]}(Z = j) = \frac{\frac{(j-1)!}{i(j+1)!}}{\frac{1}{i(i+1)}} = \frac{i(i+1)(j-1)!}{i(j+1)!} = \boxed{\frac{i+1}{j(j+1)}}$$

(c) Soit $j \geq 2$. La famille $([Y = i])_{i \geq 1}$ forme un système complet d'évènements, de probabilités non nulles, donc d'après la formule des probabilités totales

$$P(Z = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P_{[Y=i]}(Z = j)P(Y = i)$$

Or si $i \geq j$, $P_{[Y=i]}(Z = j) = 0$, donc

$$P(Z = j) = \sum_{i=1}^{j-1} P_{[Y=i]}(Z = j)P(Y = i) = \sum_{i=1}^{j-1} P([Y = i] \cap [Z = j]) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij(j+1)} = \boxed{\frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}}$$

(d) On étudie la convergence de la série de terme général $(|kP(Z=k)|)_{k\geq 2}$. Or pour tout $k \geq 2$,

$$|kP(Z=k)| = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i} \geq \frac{1}{k+1}$$

Le membre de droite est le terme général d'une série de Riemann divergente, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $(|kP(Z=k)|)_{k\geq 2}$ diverge. Donc $\boxed{Z \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

Exercice n°3 :

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2;4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

7. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

8. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

9. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leq \Phi(x) \leq x$.

10. **a.** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b. Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

11. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie I : Étude de la fonction f

1. La fonction $x \mapsto x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = +\infty$$

et, par croissances comparées, $f(x) \underset{x:+\infty}{\sim} x$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]0,1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Il suit du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]0,1[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 2$.
De même, sur $]1,+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et limites aux bornes sont 1 et $+\infty$. Il suit à nouveau du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]1,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1,+\infty[$ tel que $f(b) = 2$.
Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc : $\boxed{\text{L'équation } f(x) = 2 \text{ n'admet que deux solutions sur } \mathbb{R}_+^* : a \in]0,1[\text{ et } b \in]1,+\infty[.}$

3. On a

$$f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2,$$

$$f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2.$$

La fonction f étant continue sur $[2;4]$, il suit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in [2,4]$ tel que $f(x) = 2$. Par unicité de la solution à cette équation sur $]1,+\infty[$, on a $x = b$ et donc : $\boxed{b \in [2;4].}$

Partie II : Étude d'une suite

4. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.
Initialisation : Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geq b$ d'après **3**.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geq b$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n)+2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme, $\ln(u_n) \geq \ln(b) = b-2$, la dernière égalité provenant du fait que $2 = f(b) = b - \ln(b)$. Ainsi, $u_{n+1} \geq b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \in [b,+\infty[$.
En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq b.}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - (u_n - \ln(u_n)) \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$

Mais $u_n \geq b$ d'après **4** et f est croissante sur $[b,+\infty[\subset [1,+\infty[$ d'après **1**. Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0.$$

Ainsi, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par b d'après **4**, elle converge vers une limite $\ell \geq b$.
En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

ou encore

$$f(\ell) = 2.$$

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1,+\infty[$, on a $\ell = b$.
En conclusion, $\boxed{u_n \mapsto b.}$

6. **a.** Considérons la fonction g définie sur $[b, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \geq b$, on a
$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$
Alors, puisque $b \geq 2$, on a :
$$\forall x \geq b, \quad |g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$
En outre, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.
La suite (u_n) convergeant vers b en décroissant, il suit de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &= |u_{n+1} - b| \\ &= |g(u_n) - g(b)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - b| \\ &= \frac{1}{2}(u_n - b). \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b).}$

b. La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b, on a déjà
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b.$$
Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, puisque $b \in [2; 4]$ d'après **3**, il vient
$$u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors, il suit de **6.a** que
$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}.}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

7. La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y admet donc une primitive que l'on note G. On a alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi(x) = G(2x) - G(x).$$
Il s'ensuit que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{2}{(2x - \ln(2x))} - \frac{1}{(x - \ln(x))} \\ &= \frac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{2x - 2\ln(x) - 2x + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}. \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}.}$

8. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a
$$x - \ln(x) = f(x) > 0 \quad \text{et} \quad 2x - \ln(2x) = f(2x) > 0$$
donc $\Phi'(x)$ est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$, d'où le tableau de variations :

x	0	2	$+\infty$
$\Phi'(x)$	$\|$ $+$	0	$-$
Φ	$\nearrow$		dt

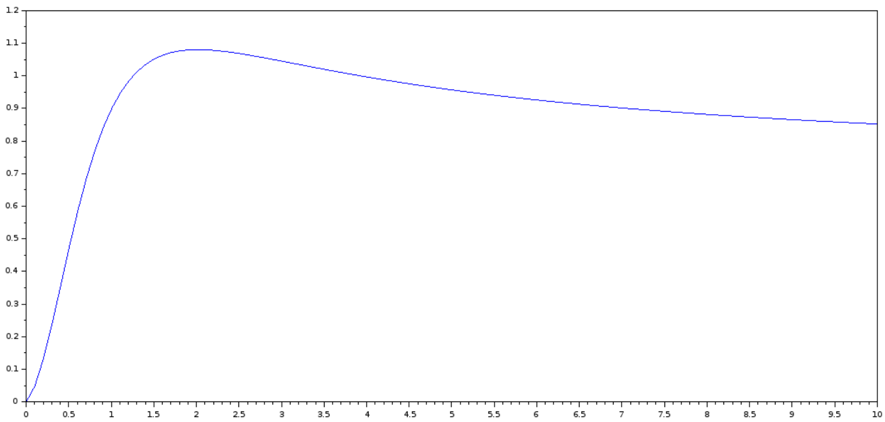
9. Pour tout $t > 0$, il suit de **1** que $f(t) \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale :
$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \leq \int_x^{2x} 1\, dt = (2x - x) = x.$$
En conclusion, $\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) \leq x.}$

10. **a.** En appliquant le théorème d'encadrement à l'inégalité trouvée en **10**, on obtient
$$\lim x \to 0^+ \Phi(x) = 0.$$
Ainsi, $\boxed{\Phi \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \text{ avec } \Phi(0) = 0.}$

b. Soit $x > 0$. On a
$$\Phi'(x) \underset{x:0^+}{\sim} \frac{-\ln(x)}{(-\ln(x))(-\ln(2x))} = -\frac{1}{\ln(2x)} \xrightarrow[x:0^+]{} 0.$$
Ainsi, $\boxed{\Phi'(x) \xrightarrow[x:0^+]{} 0.}$

11. On commence par observer que l'on a les éléments caractéristiques suivants :
- Une asymptote horizontale d'équation $y = \ln(2)$ en $+\infty$;
- Une tangente horizontale au point $(2, \Phi(2))$;
- Une (demi-)tangente horizontale au point $(0, \Phi(0))$.

On obtient alors un graphique ayant l'allure suivante (celui-ci ayant été réalisé numériquement avec Scilab) :



Problème :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $]-1; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.

PARTIE I : Etude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

1. Etudier le sens de variation de h_n.
2. Calculer $h_n(0)$ et en déduire le signe de h_n.
3. On suppose dans cette question que $n = 1$.

(a) Justifier que f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

(b) Exprime $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.

(c) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1;+\infty[$.

4. On suppose à présent que $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

   (a) Justifier que f_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

   (b) Exprime $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

   (c) En distuinguant les cas n pair et n impair, déduire les variations de la fonction f_n sur $]-1;+\infty[$.

PARTIE II : Etude d'une suite.

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. **Les questions suivantes ont pour objectif de calculer I_1.**

   (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in [0;1]$:

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$.

   (c) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_1 = \dfrac{1}{4}$.

2. **Les questions suivantes ont pour objectif d'étudier la convergence de $(I_n)_{n\geq 1}$.**

   (a) Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

   (b) Etudier le signe de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$. En déduire la convergence de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \dfrac{\ln(2)}{n+1}$.

   (d) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

3. **Les questions suivantes ont pour objectif de calculer I_n pour $n \geq 2$.**

   Pour $x \in [0;1]$, et n≥ 2, on pose $S_n = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

   (a) Montrer que $S_n = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

   (c) A l'aide d'une intégration par partie, exprimer I_n en fonction de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

   (d) En déduire que $I_n = \dfrac{\ln(2)}{n+1} + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right]$.