EPREUVE SIGMA N°1

Le 10/05/23 **Durée : 4 heures**

Conseils et consignes :

- Lisez l'énoncé du devoir avec attention.
- L'usage de la calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
- Soignez la rédaction et la présentation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats et donc corrigés.
- Vous devez laisser de la place (une demi page) pour votre note et des commentaires en début de copie.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Écrire lisiblement les numéros des questions traitées et numéroter les pages.

Exercice n°1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas inversible.

2. Déterminer les deux réels λ tels que $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
3. Pour chacun de ces réels, montrer que $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.

   Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :
   $$f(M) = AM$$
4. (a) Justifier que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$. Montrer que $f(\alpha M + N) = \alpha f(M) + f(N)$.
5. (a) Montrer que $K = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = 0_2\}$ est un espace vectoriel. En donner une base et sa dimension.
   (b) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1,E_2,E_3 et E_4 , puis justifier que $(E_1 + 3E_3, E_2 + 3E_4)$ est une base de $\mathrm{Im}(f) = \{f(M) \mid M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$.

6. Déterminer l'image par f des vecteurs de base de $\mathrm{Im}(f)$.
7. Généralisation : f est est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda X$. Justifier que $X\ {}^tX$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que $f(X\ {}^tX) = \lambda X\ {}^tX$.
   (b) Soit λ un réel et M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $f(M) = \lambda M$. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que $AC_1 = \lambda C_1$ et $AC_2 = \lambda C_2$.

Exercice n°2

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'originie est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point 0. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse $0, 1, ..., n$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. (a) Déterminer, pour entier naturel n non nul, la loi de X_n.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du modèle et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'évènement $[Y = n]$ à l'aide des des évènements $[X_i = 0]$, et leurs complémentaires.
   (b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   (c) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.
   (d) La variable Y admet-elle une espérance ?
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
   (b) En déduire que, pour tout $j \geq 2$, $\ln(j) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$.
   (c) Donner la limite de $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)}$ quand j tend vers $+\infty$.
4. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Déterminer pour $i \geq j$, la probabilité $P_{[Y=i]}(Z = j)$.
   (b) Établir que $\forall i \leq j - 1,\ P_{[Y=i]}(Z = j) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.
   (c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.
   (d) La variable Z possède-t-elle une espérance ?

Exercice n°3

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2; 4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

7. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

8. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

9. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leq \Phi(x) \leq x$.

10. **a.** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b. Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

11. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $]-1; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1 + x)$.

PARTIE I : Etude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1 + x) + \dfrac{x}{1 + x}$.

1. Etudier le sens de variation de h_n.
2. Calculer $h_n(0)$ et en déduire le signe de h_n.
3. On suppose dans cette question que $n = 1$.
   (a) Justifier que f_1 est dérivable sur $]-1; +\infty[$.
   (b) Exprime $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   (c) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1; +\infty[$.
4. On suppose à présent que $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   (a) Justifier que f_n est dérivable sur $]-1; +\infty[$.
   (b) Exprime $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (c) En distiunguant les cas n pair et n impair, déduire les variations de la fonction f_n sur $]-1; +\infty[$.

PARTIE II : Etude d'une suite.

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. **Les questions suivantes ont pour objectif de calculer I_1.**
   (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in [0;1]$:
   $$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$.
   (c) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_1 = \frac{1}{4}$.
2. **Les questions suivantes ont pour objectif d'étudier la convergence de $(I_n)_{n\geq 1}$.**
   (a) Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
   (b) Etudier le signe de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$. En déduire la convergence de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$.
   (d) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
3. **Les questions suivantes ont pour objectif de calculer I_n pour $n \geq 2$.**

   Pour $x \in [0;1]$, et n$\geq$ 2, on pose $S_n = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

   (a) Montrer que $S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
   (b) En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.
   (c) A l'aide d'une intégration par partie, exprimer I_n en fonction de $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.
   (d) En déduire que $I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right]$.