ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES II

Année 2003

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objectif du problème est d'étudier les rudiments de la théorie de la communication *- ou théorie de l'information - introduite en 1948 par Claude Shannon.*

Définitions et notations

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.
φ est la fonction définie sur $]0,1]$ par $x \mapsto \varphi(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i(A) = \varphi(P(A))$.
h est la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$h(0) = 0 \qquad \text{et pour } x \in]0,1], \quad h(x) = -x\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Pour une variable aléatoire X discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs réelles, on pose sous réserve d'existence :

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

Si X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors $H(X)$ existe et, en notant $p_k = P(X = x_k)$, on a :

$$H(X) = \sum_{k=1}^{n} h(P(X = x_k)) = \sum_{k=1}^{n} h(p_k)$$

Remarque : En théorie de l'information, $i(A)$ est appelé incertitude de l'événement *A et $H(X)$ est l'*incertitude moyenne *- ou* entropie *- de X.*

Partie I : Incertitude des événements

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

   Soit A l'événement " la carte tirée est la dame de cœur ".

   Que valent $P(A)$ et $i(A)$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée.

   A est l'événement " obtenir n fois PILE ". Préciser $i(A)$.

3. Vérifier les points suivants :

   (i) Pour un événement Ω' quasi-certain : $i(\Omega') = 0$.
   (ii) Si A et l'événement contraire $\overline{A}$ sont équiprobables, alors $i(A) = 1$.
   (iii) Si A et B sont indépendants et si $P(A \cap B) \neq 0$, alors $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$

4. Préciser $i(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$ quand les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants et $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.

   En déduire une nouvelle démonstration de 2.

5. Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$. Comparer $i(A)$ et $i(B)$.

6. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$ et quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

Partie II : Incertitude d'une variable aléatoire discrète

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U_n suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, c'est à dire pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(U_n = k) = \dfrac{1}{n}$, que vaut $H(U_n)$?

8. Si on suppose $P(Z = 1) = 1/4, P(Z = 2) = 1/4$ et $P(Z = 3) = 1/2$, que vaut $H(Z)$?

   Comparer $H(Z)$ et $H(U_3)$.

9. Vérifier que h est continue et positive sur $[0, 1]$.

   Est-elle dérivable en 0 ? Étudier h et dessiner sa courbe représentative .

10. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini.

    Montrer que $H(X) \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, X est quasi-certaine.

Partie III Maximalité de l'entropie

11. *Etude pour $n = 2$.*

    Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h_2(x) = h(x) + h(1 - x)$.

    (a) Pour $x \in [0, 1]$, on a clairement $h_2(x) = h_2(1 - x)$.
    Que signifie ce résultat quant à la courbe de h_2 dans un repère orthonormé ?

    (b) Étudier h_2 et donner son graphe.

    (c) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est à dire $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$.
    Montrer que $H(X) \leqslant 1$ avec égalité si, et seulement si, $p = 1/2$.

12. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On pose $p_k = P(X = x_k)$.

   (a) Montrer que :
$$\text{pour tout } u > 0, \quad \ln(u) \leqslant u - 1 \tag{1}$$

► *Dans la suite, on pourra utiliser sans démonstration que* $\ln(u) = u - 1$ *si, et seulement si,* $u = 1$.

   (b) Dans cette question on suppose que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p_k > 0$. Montrer que :
   $H(X) \leqslant \ln(n)/\ln(2)$ avec égalité si, et seulement si, X suit la loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. ($X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $P(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$).

   (c) Vérifier que la conclusion du b) est encore vraie en supprimant la condition " $p_k > 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ " .

13. Soit $p \in]0, 1[$ et G une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, c'est à dire
$$G(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(G = k) = p(1-p)^{k-1}$$

   On pose $m = E(G)$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = P(G = k)$.

   (a) Calculer la valeur de m, montrer que $H(G)$ existe et la calculer.

   (b) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $E(X) = m$ et $H(X)$ existe.
   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_k = P(X = k)$ et on supposera $q_k > 0$.
   En utilisant (1) vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$q_k \ln(p) + (k-1) q_k \ln(1-p) - q_k \ln(q_k) \leqslant p_k - q_k$$

   et établir : $H(X) \leqslant H(G)$ avec égalité si, et seulement si, X suit la même loi que G.