Correction du Devoir Maison n° 1

22/09/22

Exercice 1 :

Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3} = 192$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3} &= \frac{(8^n(8+1))^2}{((4^{n-1})(4-1))^3} \\
&= \frac{(8^n \times 9)^2}{(4^{n-1}\times 3)^3} \\
&= \frac{8^{2n}\times 81}{4^{3n-3}\times 27} \\
&= \frac{64^n}{4^{3n}\times 4^{-3}} \times \frac{81}{27} \\
&= \frac{64^n}{(4^3)^n} \times \frac{1}{4^{-3}} \times 3 \\
&= \frac{64^n}{64^n} \times 4^3 \times 3 \\
&= 1 \times 64 \times 3 \\
&= 192
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : pour tout } n \in \mathbb{N},\ \dfrac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3} = 192.}$

Exercice 2 :

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\dfrac{-2x+4}{x^2-3x+2} = 1.$
2. $\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{2}{x}.$

1. On détermine tout d'abord l'ensemble de validité de l'équation : pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression
$$\frac{-2x+4}{x^2-3x+2}$$
a un sens si et seulement si $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Le discriminant du trinôme associé vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$ et est donc strictement positif. Le trinôme admet donc deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
et
$$x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
Ainsi, l'ensemble de validité de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{-2x+4}{x^2-3x+2} = 1 &\iff \frac{-2x+4}{x^2-3x+2} - 1 = 0 \\
&\iff \frac{-2x+4-(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2} = 0 \\
&\iff \frac{-2x+4-x^2+3x-2}{x^2-3x+2} = 0 \\
&\iff \frac{-x^2+x+2}{x^2-3x+2} = 0 \\
&\iff -x^2+x+2 = 0
\end{aligned}$$

Il suffit de calculer le discriminant de ce trinôme : $1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$. Ce trinôme admet donc deux racines distinctes (que l'on note différemment car x_1 et x_2 sont déjà définies) :

$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{9}}{-2} = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

et

$$x_4 = \frac{-1+\sqrt{9}}{-2} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Seule x_4 est alors solution de l'équation car 2 n'appartient pas à l'ensemble de validité de l'équation.

$\boxed{\text{Conclusion : l'unique solution de l'équation est } -1.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les expressions

$$\frac{x}{x+1} \text{ et } \frac{2}{x}$$

existent si et seulement si $x \neq -1$ et $x \neq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} < \frac{2}{x} &\iff \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x} \\
&\iff \frac{x^2-2(x+1)}{x(x+1)} < 0 \\
&\iff \frac{x^2-2x-2}{x(x+1)} < 0
\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme vaut $4 - 4(-2) = 12$ et est donc strictement positif. Il admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = \frac{2-\sqrt{4}\sqrt{3}}{2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$$

et de même :

$$x_2 = 1+\sqrt{3}$$

Le trinôme est donc positif à l'extérieur de ces racines. On dresse un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-2x-2		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-2x-2}{x(x+1)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{Conclusion : l'ensemble des solution de l'inéquation est }]-1, 1-\sqrt{3}[\cup]0, 1+\sqrt{3}[.}$

Exercice 3 :

On appelle nombre d'or l'unique solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. On le note Φ.

1. Donner une expression de Φ.
2. Montrer que $\dfrac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.
3. Donner une expression simple de $\Phi^2(2-\Phi)$.

1. Le discriminant du trinôme vaut $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$ et est donc strictement positif. Celui-ci admet donc deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
et
$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$\sqrt{5}$ est compris entre 2 et 3 donc $x_1 < 0$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$

2. Par définition, on a $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ d'où $\Phi^2 - \Phi = 1$. Sachant que $\Phi \neq 0$, on a en divisant par Φ :
$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}.$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \dfrac{1}{\Phi} = \Phi - 1.}$

3. Par définition, on a $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ d'où $\Phi^2 = \Phi + 1$. Ainsi :
$$\begin{array}{rcl} \Phi^2(2-\Phi) & = & (\Phi+1)(2-\Phi) \\ & = & 2\Phi - \Phi^2 + 2 - \Phi \\ & = & -\Phi^2 + \Phi + 2 \\ & = & -\Phi^2 + \Phi + 1 + 1 \\ & = & -(\Phi^2 - \Phi - 1) + 1 \\ & = & 1 \end{array}$$
par définition de Φ.

$\boxed{\text{Conclusion : } \Phi^2(2-\Phi) = 1.}$

Exercice 4 :

Résoudre, suivant les valeurs du réel m, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :
$$x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0$$

Calculons le discriminant, que l'on notera Δ_m de ce trinôme à m fixé :
$$\begin{array}{rcl} \Delta_m & = & (-2(m+1))^2 - 4 \times 1 \times (2m+1) \\ & = & 4(m+1)^2 - 4(2m+1) \\ & = & 4(m^2+2m+1) - 8m - 4 \\ & = & 4m^2 + 8m + 4 - 8m - 4 \\ & = & 4m^2 \end{array}$$

On considère alors deux cas :

1. Si $m=0$, $\Delta_0=0$ donc l'équation admet une unique solution qui est $\frac{-(-2(m+1))}{2}=\frac{2}{2}=1$.

   $\boxed{\text{Conclusion : si } m=0, 1 \text{ est l'unique solution de l'équation.}}$

2. Si $m\neq 0$ alors $\Delta_m=4m^2>0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes qui sont :

$$\begin{aligned}\frac{-(-2(m+1))-\sqrt{4m^2}}{2} &= \frac{2(m+1)-\sqrt{4}\sqrt{m^2}}{2}\\ &= \frac{2(m+1)-2\sqrt{m^2}}{2}\\ &= m+1-\sqrt{m^2}\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}\frac{-(-2(m+1))+\sqrt{4m^2}}{2} &= \frac{2(m+1)+\sqrt{4}\sqrt{m^2}}{2}\\ &= \frac{2(m+1)+2\sqrt{m^2}}{2}\\ &= m+1+\sqrt{m^2}\end{aligned}$$

   Si $m>0$ alors $\sqrt{m^2}=m$ et dans ce cas les deux solutions sont 1 et $2m+1$. Si $m<0$ alors $\sqrt{m^2}=-m$ et on obtient exactement les mêmes racines (mais « inversées »).

$\boxed{\text{Conclusion : si } m\neq 0 \text{ les solutions de l'équation sont 1 et } m+1.}$

Exercice 5 :

1. Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x+3}$
   (a) Déterminer le domaine de définition de g.
   (b) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x\in D_g$, $g(x)=1+\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x-1}$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^x-6}{e^{2x}-4e^x+3}$
   (a) Déterminer le domaine de définition de f
   (b) Résoudre les inéquations suivantes :

$$e^{2x}+e^x-6\leq 0,\qquad e^{2x}-4e^x+3\geq 0$$

   En déduire le signe de f.

1. (a) La fonction g est définie si $x^2-4x+3\neq 0$. On cherche les racines du trinôme :

$$\Delta=16-12=4$$

   Le trinôme admet donc deux racines :

$$x_1=\frac{4-2}{2}=1\qquad x_2=\frac{4+2}{2}=3$$

   L'ensemble de définition de la fonction g est

$$D_g=\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$$

   (b) Pour $x\in D_g$,

$$\begin{aligned}1+\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-1} &= \frac{(x-3)(x-1)+a(x-1)+b(x-3)}{(x-3)(x-1)}\\ &= \frac{x^2-3x-x+3+ax-a+bx-3b}{(x-3)(x-1)}\\ &= \frac{x^2+(a+b-4)x+(3-a-3b)}{(x-3)(x-1)}\end{aligned}$$

D'après la question 1a), les racines du dénominateur trouvées permettent d'écrire la fonction g sous la forme :

$$g(x) = \frac{x^2+x-6}{(x-3)(x-1)}$$

Donc

$$\begin{aligned} g(x) = 1 + \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-1} &\Leftrightarrow \frac{x^2+x-6}{(x-3)(x-1)} = \frac{x^2+(a+b-4)x+(3-a-3b)}{(x-3)(x-1)} \\ &\Leftrightarrow x^2+x-6 = x^2+(a+b-4)x+(3-a-3b) \\ &\Leftrightarrow x-6 = (a+b-4)x+(3-a-3b) \end{aligned}$$

Pour que ces deux expressions soient égales, il faut et il suffit que les coeffcients devant les x et les constantes soient égales, c'est à dire :

$$\begin{cases} a+b-4 &= 1 \\ 3-a-3b &= -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 5-b \\ 3b &= 9-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 5-b \\ 3b &= 9-(5-b) = 4+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ b &= 2 \end{cases}$$

On obtient donc , pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$

$$g(x) = 1 + \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x-1}$$

2. (a) La fonction f n'est pas définie si $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$. Pour trouver les valeurs interdites, on pose $X = e^x$. L'équation précédente devient : $X^2 - 4X + 3 = 0$, dont on connait les solutions : $X = 1$ et $X = 3$.

Les valeurs interdites sont donc
- $X = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
- $X = 3 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$.

La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; \ln(3)\}$.

(b) On pose $X = e^x$. Les inéquations deviennent : $X^2 + X - 6 \leq 0 \qquad X^2 - 4X + 3 \geq 0$.
On cherche les racines du premier trinôme :

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

Il admet donc deux racines :

$$X_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \qquad X_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

On construit le tableau de signe sur $]0;+\infty[$ (seul celui-ci nous intéresse car comme on a posé $X = e^x$, on doit avoir $X > 0$.

x	0		1		2		3		$+\infty$
X^2+X-6		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
X^2-4X+3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{X^2+X-6}{X^2-4X+3}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

- $X = -3 \Leftrightarrow e^x = -3$ ce qui est impossible car l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- $X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$e^{2x}+e^x-6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{2x}-4e^x+3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{e^{2x}+e^x-6}{e^{2x}-4e^x+3}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{2x} - 4e^x + 3 \geq 0$ est $S_1 =]-\infty; 0] \cup [\ln(3), +\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{2x} + e^x - 6 \leq 0$ est $S_2 =]-\infty; \ln(2)]$.

La fonction f est positive sur $]0; \ln(2)] \cup] \ln(3), +\infty[$ et négative sur $]-\infty; 0[\cup [\ln(2); \ln(3)[$.