Correction du Devoir Maison n° 2

04/10/22

Exercice 1 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!} \geq (n+1)^n$.
2. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)! \geq (n!)^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^{n} k} = \prod_{k=n+2}^{2n+1} k$$
Or pour tout $k \in [|n+2; 2n+1|]$, $k \geq n+1$, donc on obtient
$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = \prod_{k=n+2}^{2n+1} k \geq \prod_{k=n+2}^{2n+1} (n+1) = (n+1)^{2n+1-(n+1)+1}$$
ou encore
$$\boxed{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \geq (n+1)^n}$$

2. **Initialisation :**
Pour $n=1$, on a d'un côté
$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)! = \prod_{k=0}^{0}(2k+1)! = (2\times 0+1)! = 1! = 1$$
et de l'autre $(0!)^0 = 1^0 = 1$. Ainsi $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)! \geq (0!)^0$, et l'initialisation est vérifiée.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)! \geq (n!)^n$. Montrons que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1}$.

Par définition, on a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)! \times (2n+1)!$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :
$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq (n!)^n(2n+1)!$$
Or d'après la question précédente,
$$(2n+1)! \geq (n+1)^n \times (n+1)!$$
donc en combinant ces deux inégalités, on obtient
$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! &\geq (n!)^n \times (n+1)^n \times (n+1)! \\ &\geq ((n+1)\ n!)^n \times (n+1)! \\ &\geq ((n+1)!)^n \times (n+1)! \\ &\geq ((n+1)!^{n+1}\end{aligned}$$
L'hérédité est vérifiée.

Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)! \geq (n!)^n$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. On appelle coefficient binomial "k parmi n", et on note $\binom{n}{k}$ la quantité

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq n$. Montrer que
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq n$. Montrer que
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n)!}\boxed{=1} \qquad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!}\boxed{=n} \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!(n)!}\boxed{=1}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq n$.
$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\\ &= \frac{k \times (n-1)!}{k \times (k-1)!((n-k)!} + \frac{(n-k) \times (n-1)!}{(n-k) \times k!(n-k-1)!}\\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}\\ &\boxed{= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}\end{aligned}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. On a d'un côté
$$k\binom{n}{k} = \frac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{k \times n!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{\times n!}{(k-1)!(n-k)!}$$
et de l'autre
$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{\times n!}{(k-1)!(n-k)!}$$
donc
$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Rappeler la formule donnant pour x réel, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

2. En dérivant cette expression, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.

3. Retrouver ce résultat en calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} 2^j$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad x=1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si} \quad x\neq 1 \end{cases}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus 1$ par $f(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+...+x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Cette fonction est dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$, et pour tout $x\neq 1$, on a d'un côté

$$f'(x) = 1+2x+3x^2+...+nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$$

et de l'autre

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n+nx^{n+1}+1}{(1-x)^2}$$

d'où l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x^n(nx-n-1)+1}{(1-x)^2}$$

Cette égalité étant valable pour tout $x\neq 1$, en posant $x=2$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = \frac{2^n(2n-n-1)+1}{(1-2)^2} = (n-1)2^n+1$$

et en multipliant tout par 2 on obtient finalement

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^k k = (n-1)2^{n+1}+2}$$

3. En fixant d'abord les valeurs de i, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq i<j\leq n} 2^j &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2^j = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}\left(\frac{1-2^{n-i}}{1-2}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}(2^{n-i}-1) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n+1}-2^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1} = 2^{n+1}\sum_{i=0}^{n-1} 1 - 2\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\ &= n2^{n+1} - 2\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = n2^n+2-2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(n-1)+2\end{aligned}$$

En fixant d'abord les valeurs de j, on obtient

$$\sum_{0\leq i<j\leq n} 2^j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} 2^j = \sum_{j=1}^{n} j2^j = \sum_{j=0}^{n} j2^j$$

On retrouve alors l'égalité

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} 2^j\ j = 2^{n+1}(n-1)+2}$$